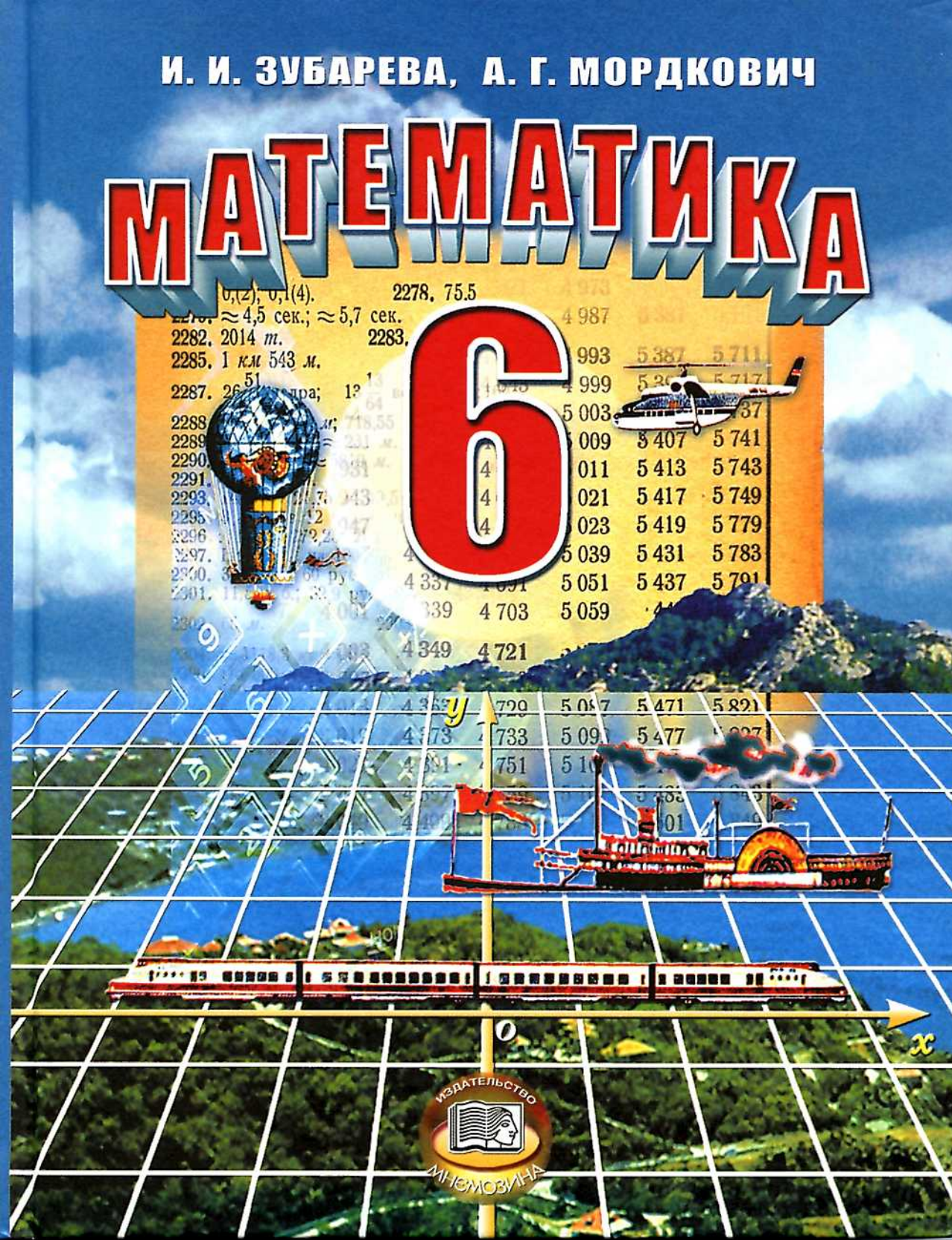
И. И. ЗУБАРЕВА, А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

6



И. И. ЗУБАРЕВА, А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

6

КЛАСС

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2009

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
З-91

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/9 от 31.10.2007) и Российской академии образования (№ 01-651/5/7 от 29.10.2007)

Зубарева И. И.

З-91 Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. — 8-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 264 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01303-7

Теоретический материал в учебнике изложен таким образом, чтобы преподаватель смог применять проблемный подход в обучении. С помощью системы обозначений выделяются упражнения четырех уровней сложности. В каждом параграфе сформулированы контрольные задания, исходя из того, что должны знать и уметь учащиеся для достижения ими уровня стандарта математического образования. В конце учебника даны домашние контрольные работы и ответы. Цветные иллюстрации (рисунки и схемы) обеспечивают высокий уровень наглядности учебного материала.

Учебник можно использовать в качестве продолжения любого курса начальной школы: как традиционного, так и развивающего направления.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

© «Мнемозина», 2002
© «Мнемозина», 2009
© Оформление. «Мнемозина», 2009
Все права защищены

ISBN 978-5-346-01303-7

Условные обозначения

Для облегчения работы с учебником в его текст введена специальная символика.

Таким шрифтом (светлым курсивом) выделено то, на что следует обратить особое внимание. Как правило, это советы или новые понятия. С ними более глубоко вы познакомитесь в старших классах.

Таким шрифтом (жирным) выделены новые термины. Их смысл нужно уметь объяснить в 6-м классе.

Таким шрифтом (жирным курсивом) выделены правила, которые желательно выучить наизусть.

Большинство заданий в учебнике отмечены специальными значками.

Самые важные обозначены буквой **У** — это учебные задания. Выполняя их, вы обязательно узнаете что-нибудь новое, например новое правило или новое свойство уже известного вам понятия.

Все остальные задания — для закрепления нового материала или повторения ранее пройденного. Наиболее простые из них никак не выделены, а задания посложнее отмечены значком ○.

Более трудные задания обозначены символом ●. Если вы не можете выполнить такое задание, не торопитесь обращаться за помощью к родителям: во-первых, оно будет обязательно разобрано в классе; во-вторых, настанет момент, когда родители не смогут вам помочь. Думать придется самостоятельно. Учиться этому нужно уже сейчас.

Значком ✸ отмечены самые трудные задания. Возможно, на их выполнение уйдет не один день. Но, если вы хотите участвовать в математических конкурсах, олимпиадах и т. п., надо проявить терпение и настойчивость.

Значками ▷ и ◁ обозначен дополнительный материал. Первый — показывает его начало, а второй — конец. Текст между значками дан мелким шрифтом. Этот материал не является обязательным для изучения.

Так отмечен ***наиболее важный*** теоретический материал (правила, выводы, пояснения).

Желаем успехов!

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Данный учебник является продолжением учебника «Математика–5» тех же авторов. В нем сохранен тот же стиль, что и в учебнике 5-го класса, — в отношении оформления (условные обозначения, структура построения глав, параграфов, упражнений) и методических подходов: как и в предыдущем учебнике, авторы предлагают систему упражнений, помогающих учителю в организации поисково-эвристической деятельности учащихся.

Остановимся на основных отличиях нашего учебника от тех, которые используются в школе в течение последних лет (и даже десятилетий).

Традиционно в учебниках 6-го класса темы «Положительные и отрицательные числа» и «Обыкновенные дроби» представлены в отдельных главах. В нашем учебнике нет главы «Обыкновенные дроби». Алгоритмы действий с обыкновенными дробями (кроме умножения и деления) рассмотрены в 5-м классе. Поэтому в главу I «Положительные и отрицательные числа» включаются задания и с обыкновенными дробями. Уровень этих заданий повышается очень медленно, правила умножения и деления обыкновенных дробей даются в предпоследнем параграфе главы I. Окончательная отработка действий с обыкновенными дробями происходит при рассмотрении темы «Делимость», когда изученные свойства сразу же находят практическое применение в работе с ними.

Также следует отметить, что в учебнике большое внимание уделяется построению математических моделей. Вводятся такие понятия, как геометрическая модель, аналитическая модель. Впервые эти понятия используются в теме «Числовые промежутки». В последующих параграфах они рассматриваются уже в новых ситуациях.

Авторы

ГЛАВА I

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. КООРДИНАТЫ

§ 1. ПОВОРОТ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

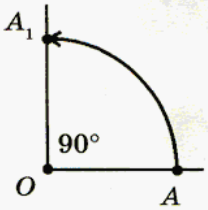


Рис. 1

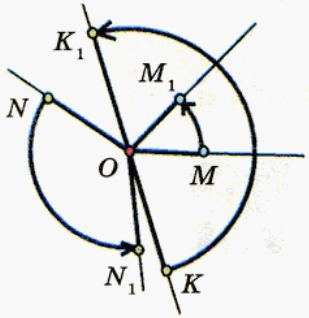


Рис. 2

На рисунке 1 показан **поворот** точки A вокруг точки O, **центра поворота**, на 90°. При повороте точка A переходит в точку A_1.

Рассмотрите рисунок 2. Здесь тоже показаны повороты точек. Опишите этот рисунок и определите, на какой угол поворачивается точка в каждом случае. Для какой точки угол поворота можно определить без транспортира? Охарактеризуйте расположение начальной и конечной точек (M и M_1, N и N_1, K и K_1) относительно центра поворота.

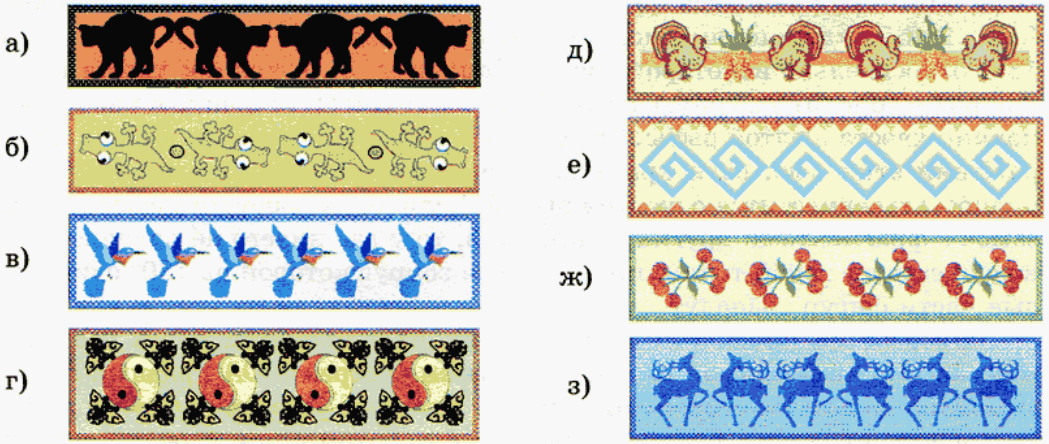


Рис. 3

На рисунке 3 изображены различные орнаменты. Все они состоят из одинаковых повторяющихся фрагментов. Покажите эти фрагменты. Обратите внимание на фрагменты орнаментов б), г), е), ж). Подумайте, что их объединяет.

Проверьте себя.

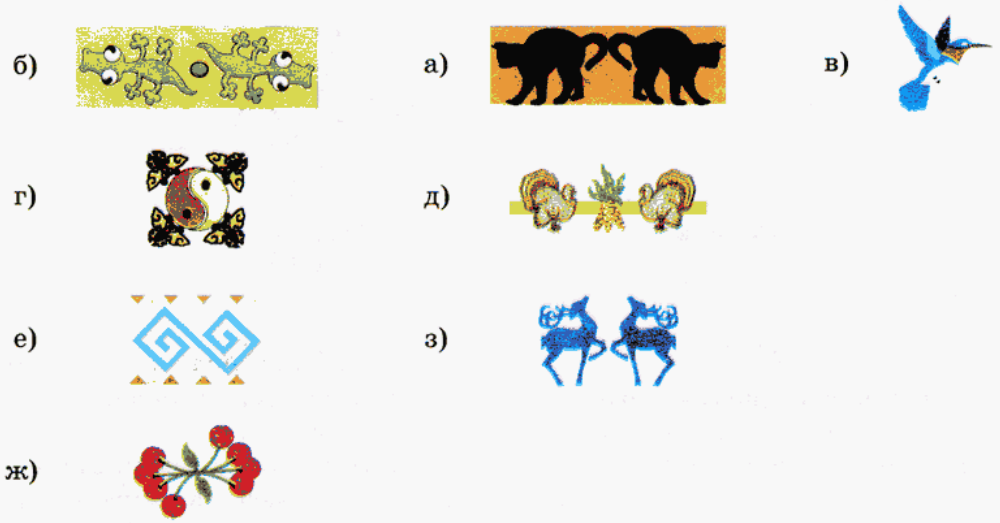


Рис. 4

Если внимательно посмотреть на рисунки б), г), е), ж), можно заметить, что повторяющиеся фрагменты состоят из двух одинаковых частей (рис. 4) и каждую из них можно получить из другой части поворотом на 180° относительно некоторой точки. Например, если кончик хвоста красной рыбы (рис. 5) повернуть на 180° вокруг точки O, то попадем как раз на кончик хвоста желтой рыбы. То же можно сказать и о других точках изображений этих рыб: если красную рыбу целиком повернуть на 180°, она полностью совместится с желтой рыбой. Если вы попробуете сделать то же самое с фрагментами других орнаментов, то у вас ничего не получится — не существует такой точки, при повороте вокруг которой на 180° одинаковые части фигур совпадут.

Отметим на плоскости точку O (рис. 6) и проведем через нее прямую AO. На этой прямой отложим от точки O отрезок OA_1, равный отрезку AO, но по другую сторону от точки O. Получим развернутый угол AOA_1. Это значит, что точку A_1 можно получить поворотом точки A на 180° вокруг точки O.

Рис. 5

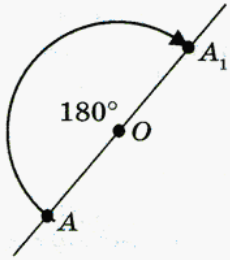


Рис. 6

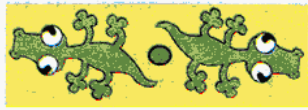


Рис. 7

Точки A и A_1 называют **симметричными** относительно точки O, а точку O называют **центром симметрии**.

Вернемся к рисунку 5. Здесь красная и желтая рыбы симметричны относительно точки O, а выделенные точки являются **центрально-симметричными точками**. Фигуры, симметричные относительно какой-либо точки, называют **центрально-симметричными фигурами**.

Фигуру, центрально-симметричную данной, можно получить поворотом исходной фигуры на 180°. При повороте форма и размеры фигуры не меняются, значит, *центрально-симметричные фигуры равны*.

Как расположены центрально-симметричные точки относительно центра симметрии? Подумайте, как найти точку, симметричную данной относительно центра — точки O.

Проверьте себя.

Центрально-симметричные точки лежат на одной прямой с центром симметрии по разные стороны и на равном расстоянии от него.

1. На рисунке 7 укажите центр симметрии и какие-нибудь пары центрально-симметричных точек.

У **2.** Скопируйте рисунок 8 в тетрадь и отметьте точки, симметричные точкам M, N, K относительно точки O.

Рис. 8

У **3.** Скопируйте рисунок 9 и постройте фигуру, симметричную отрезку AB относительно точки O:

Рис. 9

Проверьте себя.

Понятно, что фигура, симметричная отрезку AB, — это отрезок. Но тогда нам достаточно знать, где расположены концы этого нового отрезка, т. е. *достаточно построить точки, симметричные точкам A и B относительно точки O*. На рисунке 10 отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно точки O.

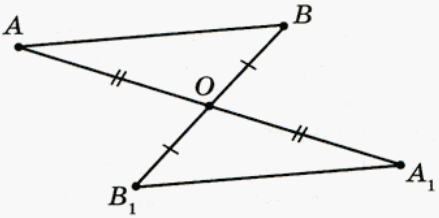


Рис. 10

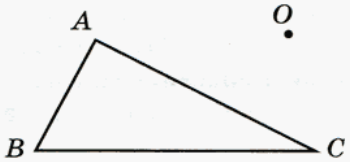


Рис. 11

О **4.** Начертите треугольник ABC и отметьте точку O вне его (как на рисунке 11). Постройте фигуру, симметричную треугольнику ABC относительно точки O.

О **5.** Начертите треугольник KMN и постройте фигуру, симметричную этому треугольнику относительно:

а) его вершины — точки M;

б) точки O — середины стороны MN.

О **6.** Постройте фигуру, симметричную:

а) лучу OM относительно точки O; запишите, какая точка симметрична точке O;

б) лучу OM относительно произвольной точки A, не принадлежащей этому лучу;

в) прямой AB относительно точки O, не принадлежащей этой прямой;

г) прямой AB относительно точки O, принадлежащей этой прямой; запишите, какая точка симметрична точке O.

В каждом случае охарактеризуйте взаимное расположение центрально-симметричных фигур.

О **7.** Подумайте, какая фигура симметрична углу ABC относительно его вершины — точки B. Выполните задания:

а) постройте фигуру, симметричную углу ABC относительно точки B;

б) постройте фигуру, симметричную углу ABC относительно точки M, лежащей на биссектрисе этого угла.

У **8.** На рисунке 12 изображены различные геометрические фигуры и показано, какое положение займет прямоугольник, если его повернуть на 90° вокруг точки пересечения его диагоналей. Если же продолжить этот процесс и повернуть прямоугольник на 180°, то он сольется (совпадет) со своим первоначальным изображением. Такую точку, при повороте вокруг которой на 180° фигура совпадает со своим первоначальным изображением, называют **центром симметрии фигуры**, а саму фигуру называют **центрально-симметричной**. Укажите центры симметрии остальных фигур.

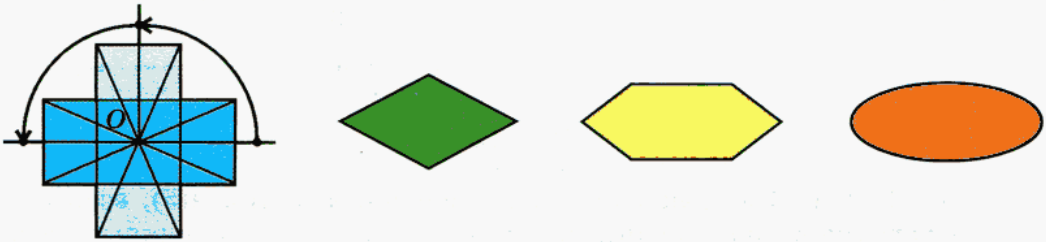


Рис. 12

9. На рисунке 13 изображены различные геометрические фигуры. Выберите из них те, которые имеют центр симметрии, и изобразите их в тетради. Отметьте центр симметрии и точки, симметричные отмеченным точкам, там, где это возможно.

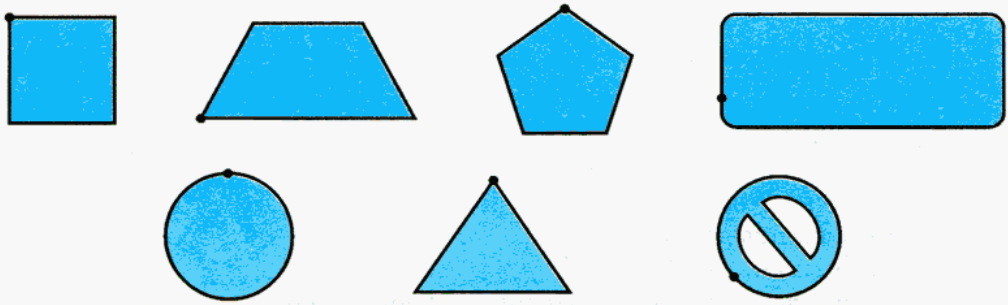


Рис. 13

10. Укажите, какие фигуры имеют центр симметрии (рис. 14).

Рис. 14

11. Запишите, в каких случаях на рисунке 15 правильно изображены координатные лучи. Ответ поясните.

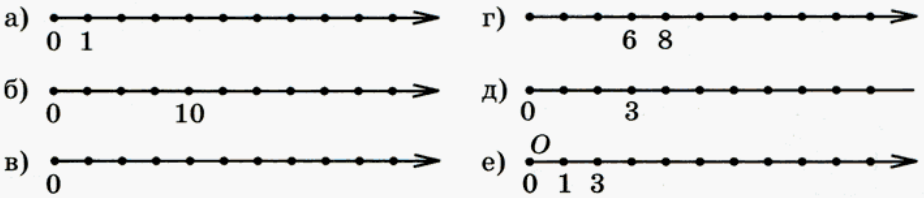


Рис. 15

12. (Устно.) а) Как изменится координата точки $A(5)$, если она передвинется по координатному лучу вправо на 2 единицы; влево на 2 единицы; вправо на 3,7 единицы; влево на 3,7 единицы; вправо на 5 единиц; влево на 5 единиц?

б) Определите, в какую сторону по координатному лучу передвинулась точка $B(14)$, и назовите ее новую координату, если ее координата увеличилась на 7; уменьшилась на 7; увеличилась на 4,9; уменьшилась на 4,9; увеличилась на 13,1; уменьшилась на 13,1.

13. Прочитайте числа: 1 345 610; 3,4; $\frac{7}{10}$; 0,7; $\frac{15}{19}$; $1\frac{5}{8}$; 0; 6,01; 15; $\frac{9}{100}$; 0,058; 24. Выберите из них:

а) натуральные числа;
б) десятичные дроби;
в) обыкновенные дроби;
г) смешанные числа.

Какое число вы не отнесли ни к одному из перечисленных видов чисел?

Вычислите:

14. а) 2,31 + 15,7; б) 0,81 + 0,092; в) 4,327 – 2,05; г) 45,8 – 6,75; д) 15,6 + 0,671; е) 12,3 – 4,548.

15. а) 91,05 · 3,2; б) 8,7 · 0,206; в) 268,8 : 5,6; г) 700,7 : 35; д) 7,02 · 0,0055; е) 0,0064 : 0,008.

16. Слово «симметри́я», как и многие другие математические термины, пришло к нам из Древней Греции. Выполните вычисления и заполните таблицу. Зашифрованное слово — перевод слова «симметрия» на русский язык.

19,19	19,91	0,9	1,2	3,45	4	4,08	0,9	20	7,245	9	0,09	12

О. 7,2 + 0,045 **С.** 16,09 + 3,1 **А.** 5 · 0,24 **Р.** 4,5 : 5
Е. 6,15 – 2,07 **О.** 16,9 + 3,01 **Ь.** 48 · 0,25 **С.** 4,5 : 0,5
З. 6,15 – 2,7 **Н.** 16,9 + 3,1 **М.** 3,2 · 1,25 **Т.** 4,5 : 50

Решите устно:

17. На оптовую базу поступило 8 т яблок. Фирма «Фрукт & Овощ» приобрела 22%, а магазин «У дяди Пети» — 12% этих яблок. На сколько больше тонн яблок приобрела фирма, чем магазин?

18. Вороне где-то Бог послал кусочек сыра,
В нем содержалось 45 процентов жира.
Белка́ же было 35.
Хотели б массу сыра мы узнать,
Но только знаем с вами мы пока,
Что жира было в нем на 50 г больше, чем белка.

19. Вычислите:

а) $\frac{2}{15}+\frac{8}{15}$; б) $\frac{20}{21}-\frac{6}{21}$; в) $\frac{5}{16}+\frac{3}{16}$; г) $\frac{13}{18}-\frac{7}{18}$.

20. Точка координатного луча $A(8)$ — центр симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $M(2)$; б) $N(5)$; в) $K(10)$; г) $L(15)$.

21. Центр симметрии — точка $B(21)$. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $P(15,5)$; б) $S(33,7)$; в) $T(2,06)$; г) $Q(38,38)$.

22. Укажите координаты точки, симметричной данной относительно точки $K(19,3)$:

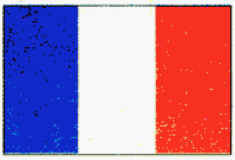
а) $A(2,7)$; б) $B(23,08)$; в) $C(9,75)$; г) $D(34,19)$.

Точка A — центр симметрии для пары симметричных точек (№ 23, 24). Укажите координату этой точки.

23. а) $M(15)$ и $N(25)$; б) $K(28)$ и $L(32)$; в) $E(41)$ и $F(49)$; г) $G(14)$ и $H(20)$; д) $E(5)$ и $H(10)$; е) $M(18)$ и $N(35)$.

24. а) $M(3,4)$ и $N(25,8)$; б) $K(0,98)$ и $L(3,54)$; в) $E(52,48)$ и $F(84,5)$; г) $G(0,036)$ и $H(0,96)$.

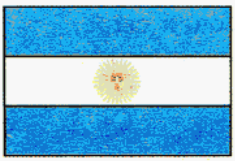
25. На рисунке 16 изображены флаги различных государств. Запишите, используя образец, какая часть флага закрашена указанным цветом.



Франция

Образец: Франция: синим — $\frac{1}{3}$, белым — $\frac{1}{3}$, красным — $\frac{1}{3}$.

Латвия

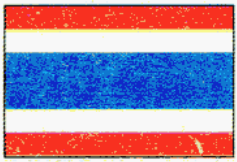


Аргентина

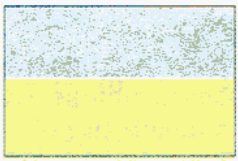
Лихтенштейн

Литва

Испания



Таиланд



Украина

Узбекистан

Рис. 16

26. Определите координаты отмеченных точек (рис. 17). Сделайте в тетради такой же рисунок, отметьте точки, симметричные данным относительно точки $M(1)$, и запишите их координаты.

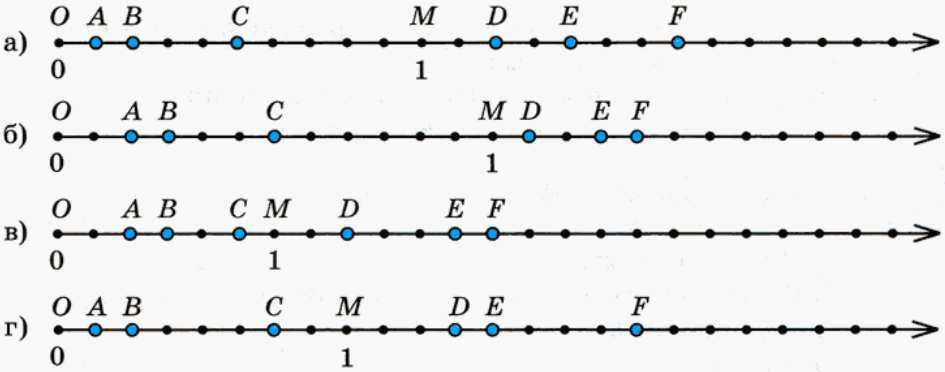
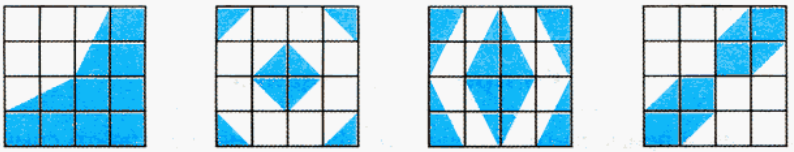


Рис. 17

27. Определите, какая часть квадрата закрашена (рис. 18).



а) б) в) г)

Рис. 18

Ответ запишите двумя способами: в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби.

28. Выполните действия:

а) $0{,}5 + \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{6} + 0{,}5$; в) $0{,}75 + \frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{3} + 0{,}2$.

29. Султан государства Карамба решил изменить государственный флаг. Он призвал визиря и повелел ему разработать образцы флага прямоугольной формы, отвечающие следующим условиям:

✓ флаг должен состоять из трех полос одинаковой ширины;

✓ использовать можно только два цвета — белый и красный;

✓ фигура в целом (и по цветам, и по форме) должна иметь центр симметрии.

Существует ли решение этой задачи? Если да, то сколько вариантов на выбор визирь сможет представить султану?

Напомним, что:

- событие, которое в данном опыте обязательно произойдет, называют *достоверным* событием;
- событие, которое в данном опыте произойти не может, называют *невозможным* событием;
- событие, которое в данном опыте может произойти, а может не произойти, называют *случайным* событием.

30. Охарактеризуйте событие, о котором идет речь в приведенном ниже задании, как достоверное, невозможное или случайное.

а) При подбрасывании монеты выпала «решка».

б) В российском магазине вам на сдачу дали бумажную ассигнацию достоинством 3 р.

в) В мешке находятся 10 шаров, все они белого цвета. Вынутый шар оказался белого цвета.

г) В мешке находятся 5 белых и 5 красных шаров. Вынутый шар оказался белого цвета.

Контрольные задания

1. Приведите примеры геометрических фигур, имеющих центр симметрии.
2. Начертите треугольник ABC, отметьте точку O и постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно этой точки, если:
   а) точка O — вне треугольника;
   б) точка O — внутри треугольника;
   в) точка O — середина стороны AB;
   г) точка O — совпадает с вершиной A.
3. На координатном луче отметьте точки, симметричные точкам $A(2)$ и $B(4)$ относительно точки $M(5)$.

§ 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

31. На рисунке 19 изображен знакомый вам прибор — термометр. Такие термометры используются для измерения температуры воздуха за пределами помещения. Постарайтесь определить, какую температуру показывает каждый из изображенных на рисунке термометров.

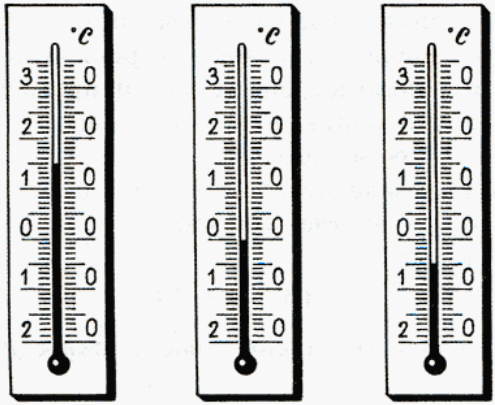


Рис. 19

Проверьте себя.

Показания термометра можно прочитать и записать по-разному:

1) 15 градусов тепла, или 15 градусов выше нуля, или +15 °C (плюс 15 °C);

2) 0 °C;

3) 5 градусов мороза, или 5 градусов ниже нуля, или −5 °C (минус 5 °C).

На шкале термометра знаки «плюс» и «минус» не ставятся. Однако их используют при записи показаний термометра вместо слов «тепла» или «выше нуля» и «мороза» или «ниже нуля». Температуру, которая записывается со знаком +, называют положительной, а температуру, которая записывается со знаком −, называют отрицательной. Заметим, что положительные значения температуры записывают и без знака +: 15 °C — это то же самое, что и +15 °C.

У **32.** 1) Днем температура воздуха была +10 °C, а к вечеру понизилась на 4 градуса. Какой стала температура воздуха к вечеру?

2) Вечером температура воздуха была +6 °C, а к полуночи понизилась на 6 градусов. Какой стала температура воздуха в полночь?

3) В полночь температура воздуха была 0 °C, а к утру понизилась на 3 градуса. Какой стала температура воздуха утром?

Во всех случаях речь идет о понижении, т. е. об уменьшении, температуры на определенное число градусов. Значит, результат может быть получен вычитанием:

+10 °C − 4 °C = +6 °C, +6 °C − 6 °C = 0 °C, 0 °C − 3 °C = −3 °C.

Рассмотрим полученные равенства. В них мы записали действия с именованными числами так же, как раньше записывали действия с килограммами, с километрами и т. д., например: 10 кг − 4 кг = 6 кг. Только здесь вместо привычных обозначений типа «кг» или «км» стоит значок °С и, кроме того, перед положительными и отрицательными значениями температуры стоят знаки + и −. Попробуйте записать числа в этих равенствах без «имен», так же как если бы вычитались килограммы:

$$10 - 4 = 6 \text{ (кг)}.$$

Если вы рассуждаете верно, у вас должны получиться такие равенства:

$$10 - 4 = 6, \qquad 6 - 6 = 0, \qquad 0 - 3 = -3.$$

В последнем равенстве действие вычитания привело к необходимости записать результат в виде числа, перед которым стоит знак −. В таких случаях уже не значения температуры, а числа называют **отрицательными**. А такие числа, как 10 или +10, называют **положительными**. Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом.

Отрицательные числа нужны не только при измерении температуры. Например, если предприятие получило доход в 1 млн р. или, наоборот, потерпело убытки на 1 млн р., как это отразить в финансовых документах? В первом случае записывают 1 000 000 р. или +1 000 000 р. А во втором, соответственно, −1 000 000 р.

В дальнейшем вы познакомитесь с использованием отрицательных чисел во многих других случаях. А раз так, то необходимо научиться выполнять с ними те же арифметические действия, что и с положительными числами, сравнивать их.

Положительные числа и нуль мы умеем изображать точками координатного луча. Для отрицательных чисел места на координатном луче нет.

У **33.** Даны числа: 1; −1; 3; −3; 9; −9.

1) Начертите координатный луч, взяв единичный отрезок, равный 0,5 см. Определите, какие из данных чисел можно на нем отметить, и отметьте их.

2) Подумайте, как надо дополнить координатный луч, чтобы оставшиеся числа тоже можно было отметить. Как бы вы назвали то, что у вас получится?

Проверьте себя.

Чтобы отметить отрицательные числа, надо координатный луч дополнить противоположным ему лучом и нанести на него такие же деления:

Получится прямая, которую называют *координатной прямой*.

34. 1) Рассмотрите рисунок 20. Какие прямые, изображенные на этом рисунке, можно назвать координатными прямыми? Постарайтесь обосновать свои ответы.

2) Запишите координаты точек, изображенных на прямых в случаях г) и д).

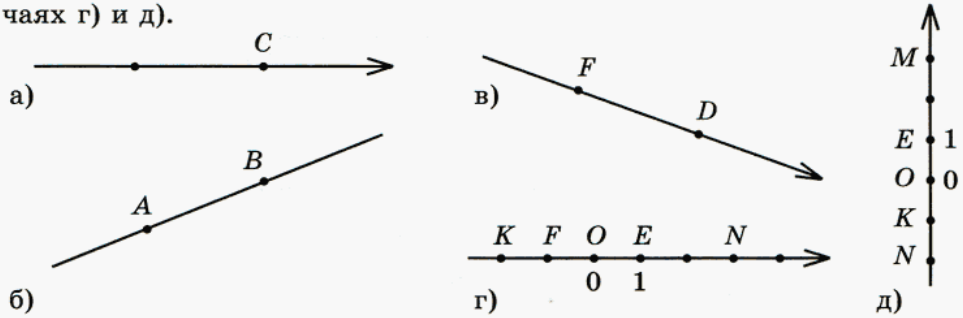


Рис. 20

Проверьте себя:

г) $F(-1)$, $K(-2)$, $E(1)$, $N(3)$;

д) $K(-1)$, $N(-2)$, $E(1)$, $M(3)$.

Можно ли указать координаты точек в других случаях? Ответ обоснуйте.

3) Попытайтесь объяснить, что такое координатная прямая.

Проверьте себя.

Координатная прямая — это прямая с указанными на ней началом отсчета, направлением отсчета и единичным отрезком.

Термометр, изображенный на рисунке 19, — это фактически фрагмент координатной прямой. Координатную прямую можно располагать на плоскости по-разному (рис. 21), но мы пока будем располагать ее так, как показано на рисунке 21, б.

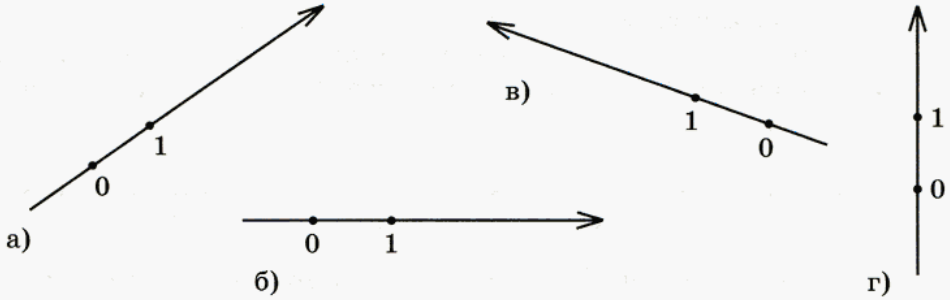


Рис. 21

35. Около стрелочки, указывающей направление отсчета на координатной прямой, часто ставят букву: x, y или t (рис. 22).

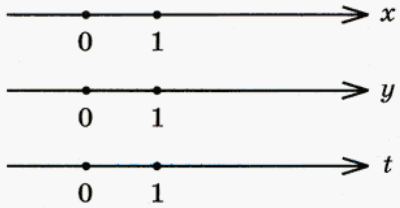


Рис. 22

В таких случаях говорят соответственно: ось x, ось y или ось t. Координату точки при этом можно записывать так:

$x = 1$, $x = 3$, $x = -1$;

$y = -2{,}5$, $y = \frac{1}{3}$, $y = 10$;

$t = 0$, $t = 5$, $t = -2{,}73$.

Изобразите три координатные прямые — ось x, ось y и ось t — и отметьте на них точки с указанными выше координатами.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Математики, работая с координатной прямой, обычно под словами «точка с координатой a» и «число a» подразумевают одно и то же. Поэтому можно говорить так:

«Точка расположена слева от точки $O(0)$»,

но можно говорить и так:

«Число расположено слева от точки $O(0)$».

36. 1) Запишите координаты отмеченных на рисунке 23 точек:

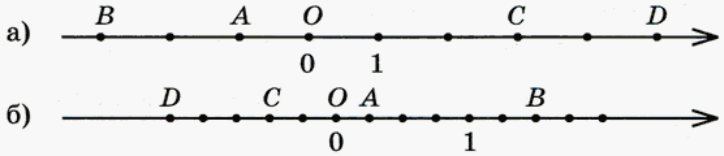


Рис. 23

2) Как называются числа, расположенные справа от точки $O(0)$, слева от этой точки? Как записывают эти числа?

Проверьте себя.

Числа, расположенные на координатной прямой справа от нуля, называются **положительными**, а слева — **отрицательными**.

37. Запишите, какие из чисел 12; −15; +8; 0,5; −9; +17; 0; −2,1:

а) положительные; б) отрицательные; в) не относятся ни к положительным, ни к отрицательным числам.

38. Запишите координаты точек A, B, C, D (рис. 24).

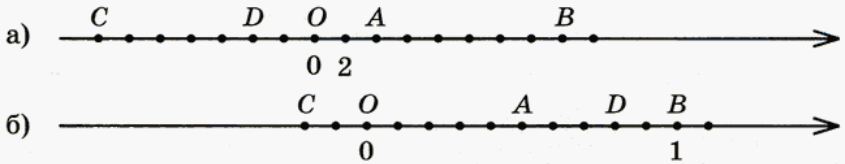


Рис. 24

39. Отметьте на координатной прямой точки:

а) $A\left(\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{3}{5}\right)$, $C\left(-\frac{2}{5}\right)$, $D\left(1\frac{2}{5}\right)$, $E\left(-1\frac{1}{5}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) A (50), $B(-25)$, $C(150)$, $D(200)$, $E(-300)$, $F(+250)$;

в) $A\left(\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{8}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-\frac{3}{4}\right)$, $E\left(\frac{7}{8}\right)$, $F\left(-\frac{3}{8}\right)$, $G\left(-1\frac{1}{8}\right)$;

г) A (40), $B(-80)$, $C(20)$, $D(-100)$, $E(120)$, $F(-200)$.

40. Точка координатной прямой $O(0)$ взята в качестве центра симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $M(12)$; б) $N(-0{,}5)$; в) $K(120)$; г) $L(-152)$.

41. Центр симметрии — точка $B(5)$. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $P(12)$; б) $S(-3)$; в) $T(25)$; г) $Q(-38)$.

42. Укажите координату точки, симметричной данной относительно точки $K(-10)$:

а) $A(15{,}5)$; б) $B(-28{,}1)$; в) $C(-9{,}9)$; г) $D(-12{,}8)$.

Укажите координату центра симметрии, точки A, для каждой пары симметричных точек (№ 43, 44):

43. а) $M(-15)$ и $N(-25)$; б) $K(-8)$ и $L(8)$; в) $E(-2)$ и $F(1)$; г) $G(-14)$ и $H(4)$; д) $P(-4)$ и $Q(-1)$; е) $B(-10)$ и $C(5)$.

44. а) $M(-3{,}4)$ и $N(3{,}4)$; б) $K(-10)$ и $L(0)$; в) $E(-12)$ и $F(-8)$; г) $G(-3)$ и $H(5)$; д) $P(-8)$ и $Q(12)$; е) $B(-15)$ и $C(3)$.

45. Вычислите:

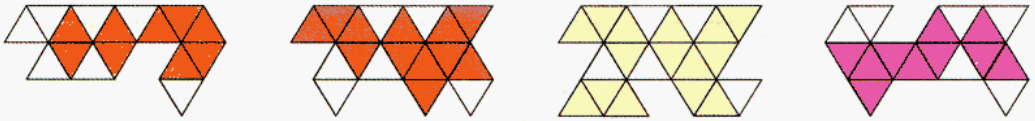
а) $4{,}8 : 0{,}4 + 2{,}8 : 7 - 20{,}5 \cdot 0{,}002$;

б) $52{,}2 : 30 + (3{,}07 \cdot 0{,}2 - 2{,}04 \cdot 0{,}05)$;

в) $3{,}58 \cdot 3{,}9 - 0{,}01 : 4 - 5{,}5838 \cdot 2{,}5$;

г) $7{,}14 : 3{,}5 - (5{,}02 \cdot 0{,}55 - 4{,}5 \cdot 0{,}34)$.

46. Определите, какая часть фигуры закрашена (рис. 25).



а) б) в) г)

Рис. 25

Сравните числа:

47. а) 12,15 и 12,71; б) 0,582 и 0,59; в) 28,154 и 28,54; г) $\frac{9}{100}$ и 0,09; д) 0,780 и 0,78; е) $\frac{17}{1000}$ и 0,17.

48. а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{11}$ и $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{2}$ и 0,5; г) 0,25 и $\frac{1}{4}$.

Вычислите:

49. а) $\frac{5}{12} + \frac{7}{12}$; б) $\frac{9}{14} - \frac{2}{14}$; в) $5\frac{5}{16} + 1\frac{3}{16}$; г) $7\frac{6}{23} - 6\frac{2}{23}$.

50. а) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$; б) $\frac{8}{15}-\frac{2}{15}$; в) $6\frac{9}{17}+5\frac{8}{17}$; г) $2\frac{16}{21}-2\frac{13}{21}$.

51. Определите, какая часть фигуры закрашена (рис. 26).

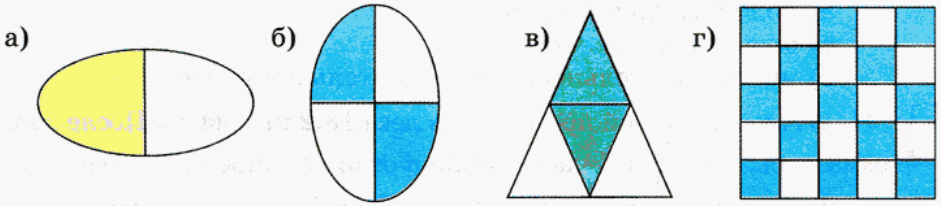


Рис. 26

Сравните числа:

52. а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{8}$; в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$; г) $\frac{5}{12}$ и $\frac{4}{9}$.

53. а) $\frac{3}{4}$ и $\frac{12}{16}$; б) $\frac{4}{15}$ и $\frac{2}{5}$; в) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{8}$; г) $\frac{7}{8}$ и $\frac{17}{20}$.

Выполните действия:

54. а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$; в) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; д) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$; ж) $\frac{5}{12}+\frac{4}{9}$;

б) $\frac{3}{4}+\frac{12}{16}$; г) $\frac{4}{15}+\frac{2}{5}$; е) $\frac{3}{7}-\frac{3}{8}$; з) $\frac{7}{8}-\frac{17}{20}$.

Найдите разные способы решения следующих задач.

55. а) Площадь одного огорода 6 соток, а другого — 8 соток. На каждом из них 1% площади занят посевами фасоли. На сколько площадь, занятая фасолью, на первом участке меньше, чем на втором?

б) В течение года из бюджета одного города на нужды образования выделено 12 783 000 р., а из бюджета другого — 38 349 000 р. В обоих случаях сумма, выделенная на образование, составила 1% городского бюджета. Во сколько раз бюджет второго города превышает бюджет первого?

56. В бригаде по уборке моркови работают 12 человек, а в бригаде по уборке картофеля — в 5 раз больше. Сколько человек надо перевести с уборки картофеля на уборку моркови, чтобы в обеих бригадах людей стало поровну?

57. Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное.

На координатной прямой взяли произвольную точку и определили ее координату; оказалось, что координата:

а) положительное число;

б) отрицательное число;

в) ни положительное, ни отрицательное число.

58. а) Алеша с папой принесли из леса 13,2 кг грибов. После обработки оказалось, что $\frac{2}{11}$ их массы ушло в отходы. Определите массу отходов.

б) Для приготовления варенья была куплена вишня, из которой Лера и Даша вынимали косточки. Масса вынутых косточек оказалась равной 1,3 кг, что составило $\frac{2}{5}$ массы переработанной вишни. Определите массу купленной вишни.

59. Даны числа: 2; 5; 7; 11. Перед ними надо поставить знак + или − так, чтобы:

а) получить два положительных и два отрицательных числа;

б) получить три положительных и одно отрицательное число;

в) получить одно положительное и три отрицательных числа;

г) получить все отрицательные числа.

Постарайтесь найти все способы.

Контрольные задания

1. Запишите координаты отмеченных на рисунке 27 точек.

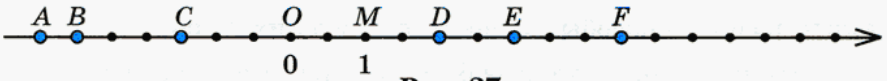


Рис. 27

2. Отметьте на координатной прямой точки $A(-3)$, $B(2)$ и точки, симметричные им относительно точки $O(0)$.

§ 3. МОДУЛЬ ЧИСЛА. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА

60. Отметьте на координатной прямой точки $A(-3)$ и $B(+5)$ и определите расстояние между ними в единичных отрезках.

Говоря о расстоянии между точками координатной прямой, всегда подразумевают, что оно измеряется в единичных отрезках этой прямой. Поэтому в дальнейшем будем говорить просто «расстояние

между точками координатной прямой», опуская слова «в ее единичных отрезках».

61. Укажите расстояние от точки $O(0)$ до точек $A(-4)$, $B(6)$, $C(-6)$, $D(-3{,}5)$, $F(15)$, $M(-100)$.

Расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета, т. е. до точки $O(0)$, называют **модулем числа** a и обозначают $|a|$.

Например, $|-4| = 4$, $|6| = 6$ (читается: «модуль минус четырех равен четырем», «модуль шести равен шести»).

62. Укажите модули чисел:

а) 25; −9,71; −78; 0;

б) $\frac{5}{12}$; $-\frac{9}{25}$; $8\frac{3}{14}$; $-8\frac{3}{14}$.

$$|0| = 0$$

63. Найдите значения выражения $|x|$, если:

а) $x = 13{,}5$; −18; 0,4; −11; б) $x = -17$; $\frac{1}{9}$; $-3\frac{5}{6}$; $-9\frac{11}{15}$.

64. Из данных чисел выберите то, которое имеет наибольший модуль:

а) 1,2; −1,11; 1,19; −1,3; б) 7,81; −7,392; 7,085; −7,9.

65. Запишите модули координат точек, отмеченных на координатной прямой (рис. 28).

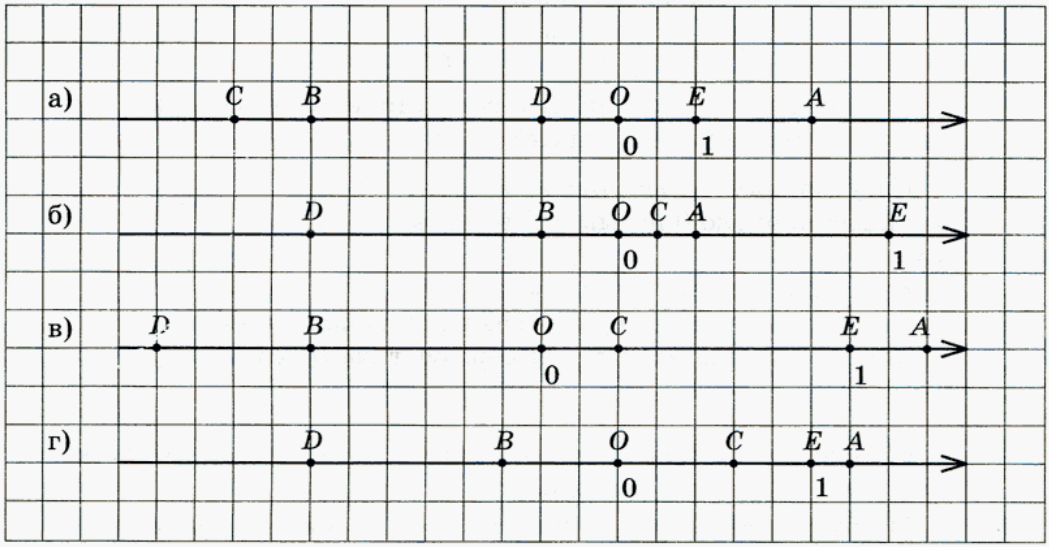


Рис. 28

66. 1) Отметьте на координатной прямой точки $A(2)$, $B(-2)$, $C(+4)$, $D(-3)$, $E(-5{,}2)$, $F(5{,}2)$, $G(-6)$, $H(7)$.

2) Среди этих точек найдите и укажите симметричные относительно точки $O(0)$. Что можно сказать о координатах симметричных точек?

Проверьте себя.

Точки, симметричные относительно точки $O(0)$:

$$A(2) \text{ и } B(-2),$$

$$E(-5{,}2) \text{ и } F(5{,}2).$$

Координаты симметричных точек — это числа, которые отличаются только знаком. Такие числа называют *противоположными*.

67. 1) Отметьте на координатной прямой числа, модули которых равны 2, 6, 0, 3.

2) Что можно сказать о модулях противоположных чисел? Попробуйте объяснить, что такое противоположные числа, используя понятие модуля числа.

Проверьте себя.

Противоположные числа — это числа, имеющие одинаковые модули, но отличающиеся знаком.

Например, 2 и −2, $\frac{3}{7}$ и $-\frac{3}{7}$, $2\frac{1}{3}$ и $-2\frac{1}{3}$, −3,17 и 3,17. Лишь одно число противоположно самому себе — это число 0, поскольку $0 = -0$ (поэтому −0 писать не принято).

$$-0 = 0$$

Натуральные числа, числа, им противоположные, и число 0 называют **целыми числами**.

Все целые числа и все дроби (положительные и отрицательные) называют **рациональными числами**. Говорят также, что все вместе они образуют *множество рациональных чисел*.

68. а) Можно ли о противоположных числах сказать, что это неравные числа с равными модулями?

б) Объясните, почему числа +2 и −2 — противоположные, а +2 и −3 — нет.

69. Укажите числа, противоположные данным:

а) 31; +1,5; $1\frac{2}{3}$; $-5\frac{4}{7}$; б) $\frac{8}{11}$; −8,3; −44; 0.

У **70.** Из чисел 15; 2,5; −2,5; −18; 0; 45; −45 выберите: а) натуральные числа; б) целые числа; в) неотрицательные числа; г) неположительные числа.

Проверьте себя.

Задания под буквами а) и б), скорее всего, затруднений не вызвали: натуральные числа — это числа 15 и 45, целые числа — это числа 15; −18; 0; 45 и −45. Поэтому разберем только задания под буквами в) и г), где говорится о *не*отрицательных и *не*положительных числах.

Что означает прилагательное «неотрицательное»? Очевидно, что если число положительное, то оно неотрицательное, но нельзя забывать о числе, которое не относится ни к отрицательным, ни к положительным числам, — это число 0. Следовательно,

неотрицательные числа — это все положительные числа и число 0.

Аналогично

неположительные числа — это все отрицательные числа и число 0.

Значит, среди указанных в № 70 чисел неотрицательными являются числа

15; 2,5; 0 и 45,

а неположительными — числа

−2,5; −18; 0 и −45.

У **71.** 1) Запишите число, противоположное числу a.

2) Укажите число, противоположное числу a, если:

$$a = 5, \quad a = -3, \quad a = 0, \quad a = -\frac{2}{5}.$$

Проверьте себя.

Число, противоположное a, — это $-a$.

Если $a = 5$, то $-a = -5$. Если $a = -3$, то $-a = -(-3) = 3$ и т. д.

72. Укажите число, противоположное числу b, если:

а) $b = +1{,}2$; б) $b = -\frac{2}{5}$; в) $b = -7$; г) $b = 4{,}3$.

73. 1) Подумайте, что означает запись: $-(-a)$.

2) Поставьте вместо $*$ такое число, чтобы получилось верное равенство:

а) $-(-5) = *$; в) $- * = 8$; д) $- * = 10{,}3$;

б) $3 = - *$; г) $-(+2{,}7) = *$; е) $\frac{7}{8} = - *$.

Проверьте свои рассуждения.

Запись $-(-a)$ означает: «число, противоположное числу $-a$». Но число, противоположное числу $-a$, — это a, значит, $-(-a) = a$.

Поэтому $-(-5) = 5$, $3 = -(-3)$ и т. д.

74. Укажите число, противоположное числу $-a$, если:

а) $-a = 4$; б) $-a = -7$; в) $-a = +12{,}8$; г) $-a = 0$.

75. Укажите число, противоположное числу $-b$, если:

а) $-b = -2$; б) $-b = +15$; в) $-b = -3{,}1$; г) $-b = \frac{3}{4}$.

76. Изобразите число a точкой координатной прямой, если:

а) $a = +2$; б) $-a = -1{,}5$; в) $a = 2{,}25$; г) $-a = 3{,}75$.

77. Изобразите число $-a$ точкой координатной прямой, если:

а) $-a = -2$; б) $a = +2{,}5$; в) $a = -1{,}2$; г) $-a = +0{,}25$.

78. Изобразите число b точкой координатной прямой, если:

а) $b = 3$; б) $-b = +4$; в) $b = -2$; г) $-b = -5$;

79. Изобразите число $-b$ точкой координатной прямой, если:

а) $b = -3{,}5$; б) $-b = +7$; в) $b = -6$; г) $-b = -4{,}5$.

80. Найдите значение выражения:

а) $-k$, если $k = 4{,}5$; -10; 8; $-(-2{,}3)$;

б) m, если $-m = 5$; -16; $+4{,}2$; $-(-9)$;

в) $-(-b)$, если $b = -7$; $3{,}4$; -21; $-(-6)$;

г) $-c$, если $c = -0{,}85$; 12; $-41{,}2$; $-(-8)$.

81. Укажите координаты точек M, N, K (рис. 29).

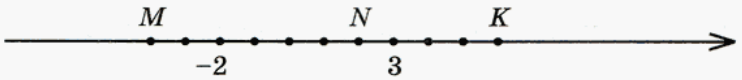


Рис. 29

82. Найдите расстояние между точками координатной прямой:
а) $A(-2)$ и $B(2)$; в) $M(-15)$ и $N(+15)$;
б) $C(-3{,}4)$ и $D(+3{,}4)$; г) $K(-21{,}8)$ и $L(+21{,}8)$.

83. Найдите x из равенства:

а) $-x = 8{,}5$; б) $-x = -4{,}2$; в) $-x = 101$; г) $-x = -5\frac{7}{15}$.

У **84.** 1) Укажите: а) $|-x|$, если $|x| = 5$; б) $|x|$, если $|-x| = 8$.
2) Верно ли, что $|x| = |-x|$? Почему?

Сравните:

85. а) 12,15 и $|-12{,}71|$; в) $|28{,}154|$ и $|28{,}54|$;

б) $|0{,}582|$ и 0,59; г) $\left|\frac{1}{2}\right|$ и $|-0{,}5|$.

86. а) $\left|-\frac{5}{7}\right|$ и $\frac{2}{7}$; в) $\left|-\frac{9}{100}\right|$ и 0,09; д) $\left|-\frac{7}{12}\right|$ и $\frac{7}{15}$;

б) $\left|-\frac{3}{11}\right|$ и $\left|-\frac{3}{4}\right|$; г) $|-0{,}25|$ и $\left|-\frac{1}{4}\right|$; е) 0,3 и $\left|-\frac{2}{5}\right|$.

Вычислите:

87. а) $|8| + |-4|$; б) $|-15| - |12|$; в) $|-8| \cdot |25|$; г) $|-48| : |8|$.

88. а) $|-5| - |-3|$; б) $|-22| + |8|$; в) $|75| : |-3|$; г) $|-52| \cdot |-11|$.

89. Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

а) $-8{,}2$ и 3,4; в) $-4\frac{2}{5}$ и $1\frac{7}{8}$; д) $-5\frac{3}{4}$ и $2\frac{1}{3}$;

б) $-5{,}7$ и $-0{,}5$; г) $-2\frac{1}{3}$ и 0; е) $-3{,}01$ и $1\frac{9}{11}$.

90. Решите уравнение:
а) $|x| = 9$; б) $|x| = 25$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = -7$.

Вычислите:

91. а) $1{,}5 \cdot |-3|$; в) $|-1{,}5| : 3$; д) $|-1{,}8| \cdot |+2|$;
б) $|-0{,}75| : |25|$; г) $|-8{,}1| \cdot |-3{,}2|$; е) $|+0{,}4| \cdot |-5|$.

92. а) $\left|\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\right|$; б) $\left|\frac{1}{12}\right|+\left|-\frac{5}{12}\right|$; в) $\left|-\frac{4}{15}\right|+\left|-\frac{1}{15}\right|$; г) $\left|-\frac{9}{14}\right|-\left|\frac{3}{14}\right|$.

93. На одной полке стояло x книг, а на второй — в 4 раза больше. Когда со второй полки переставили на первую 21 книгу, то книг на полках стало поровну.

Запишите выражения для следующих величин:

- число книг на второй полке первоначально;
- число книг на второй полке, после того как оттуда убрали 21 книгу;
- число книг на первой полке, после того как туда поставили 21 книгу.

Найдите равные величины и составьте уравнение — математическую модель данной ситуации.

94. В одной цистерне 11,3 т нефти, а в другой — на 15,1 т больше. В первую цистерну долили столько нефти, что ее масса увеличилась в 4 раза. Сколько нефти надо долить во вторую цистерну, чтобы масса нефти в обеих цистернах стала одинаковой?

95. Маша и Саша вышли одновременно навстречу друг другу из своих домов, расстояние между которыми 1,82 км. Через какое время они встретятся, если Маша идет со скоростью 4,2 км/ч, а Саша — на 0,7 км/ч быстрее?

Найдите значение выражения:

96. а) $1+\frac{3}{8}$; б) $1-\frac{3}{8}$; в) $2+1\frac{3}{4}$; г) $2-1\frac{3}{4}$.

97. а) $3-\frac{5}{6}$; б) $4-\frac{12}{25}$; в) $1\frac{4}{9}+5$; г) $6\frac{17}{18}-3$.

98. а) $2\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$; б) $3\frac{11}{14}-\frac{9}{14}$; в) $4\frac{5}{7}+\frac{3}{7}$; г) $3\frac{2}{13}-\frac{4}{13}$.

99. а) $3\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}$; б) $5\frac{8}{21}-2\frac{5}{21}$; в) $1\frac{4}{9}+2\frac{7}{9}$; г) $4\frac{4}{15}-2\frac{7}{15}$.

100. Запишите все целые числа, модули которых:
а) меньше 5; б) больше 5, но меньше 12.

101. Укажите (сделайте рисунок), где на координатной прямой расположены числа, модули которых равны 1; больше 1; меньше 1.

102. Укажите (сделайте рисунок), где на координатной прямой расположены числа, модули которых равны 3; меньше 3; больше 3.

103. Укажите (сделайте рисунок), где на координатной прямой расположены точки $M(x)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $|x| > 0$; б) $|x| \geqslant 0$; в) $|x| < 0$; г) $|x| \leqslant 0$.

104. Определите, какая часть фигуры на рисунке 30 закрашена. Запишите ответ разными способами, если возможно.

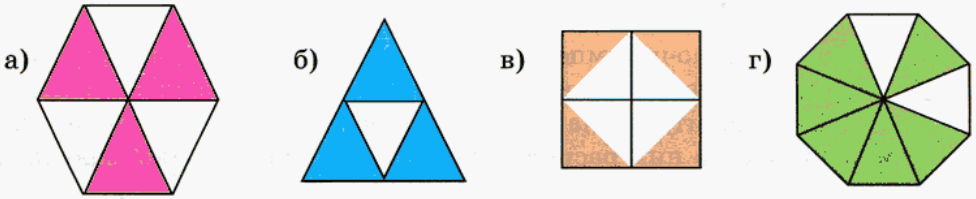


Рис. 30

Вычислите:

105. а) $\left|-\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{4}{9}\right|$; б) $\left|\frac{2}{3}\right| - \left|-\frac{4}{9}\right|$; в) $\left|-\frac{3}{5}\right| - \left|\frac{3}{25}\right|$; г) $\left|-\frac{3}{5}\right| + \left|\frac{3}{25}\right|$.

106. а) $\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right|$; б) $\left|\frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right|$; в) $\left|\frac{4}{5}\right| + \left|-\frac{9}{10}\right|$; г) $\left|-\frac{7}{8}\right| - \left|-\frac{1}{4}\right|$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется модулем числа?
2. Чему равен $|c|$ при $c = 5$; -3; $-\frac{2}{7}$; 0; 0,15?
3. Укажите числа, противоположные данным: 7,2; −10; 0.

§ 4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

107. 1) Днем температура воздуха была +7 °С, а к вечеру понизилась на 5 градусов. Какой стала температура воздуха к вечеру?

2) Сравните числа, соответствующие показаниям термометра днем и вечером. Отметьте их на координатной прямой. Какое из них расположено правее: большее или меньшее?

108. 1) Вечером температура воздуха была +2 °С, а к полуночи понизилась на 4 градуса. Какой стала температура воздуха в полночь?

2) Сравните вечернюю и полуночную температуры воздуха. Отметьте на координатной прямой эти числа. Какое число расположено правее: большее или меньшее?

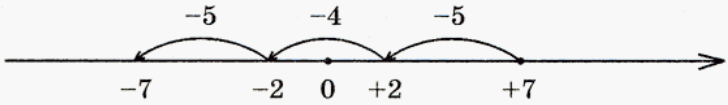
109. 1) В полночь температура воздуха была −2 °С, а к утру понизилась на 5 градусов. Какой стала температура воздуха утром?

2) Сравните числа −2 и −7. Отметьте их на координатной прямой. Какое из них расположено правее: большее или меньшее?

Проанализируйте результаты выполненных заданий и сформулируйте вывод о том, как на координатной прямой располагаются по отношению друг к другу неравные числа.

Проверьте себя.

Если выполнить все задания на одной координатной прямой, то получится такой рисунок:



Во всех заданиях речь шла о понижении, т. е. об уменьшении, температуры. Значит, в каждом случае конечное значение температуры меньше начального, поэтому:

$$2 < 7, \quad -2 < +2, \quad -7 < -2.$$

Во всех случаях правее на координатной прямой расположено большее число. Следовательно, для отрицательных чисел на координатной прямой сохраняется тот же порядок, что и для положительных: *при движении точки вправо ее координата увеличивается, а при движении точки влево ее координата уменьшается.*

Вывод:
из двух чисел большее изображается на координатной прямой правее, а меньшее — левее.

110. Объясните почему:
а) $-5 < -1$; б) $-2 > -16$; в) $-25 < 3$; г) $0 > -9$.

Определите, какое из данных чисел расположено на координатной прямой левее и на сколько:

111. а) 8 или 12; −8 или −12; 8 или −12; −8 или 12;
б) 16 или 9; −16 или −9; 16 или −9; −16 или 9;
в) 0,1 или 0,01; −0,1 или −0,01; −0,1 или 0,01; 0,1 или −0,01;
г) 1,2 или 1,12; −1,2 или −1,12; −1,2 или 1,12; 1,2 или −1,12.

112. а) $\frac{3}{17}$ или $\frac{13}{17}$; $-\frac{3}{17}$ или $-\frac{13}{17}$; $\frac{3}{17}$ или $-\frac{13}{17}$; $-\frac{3}{17}$ или $\frac{13}{17}$;
б) $\frac{2}{5}$ или $\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{5}$ или $-\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{5}$ или $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{5}$ или $-\frac{4}{5}$.

Сравните числа и их модули:

113. а) −7 и 7; б) 0 и −18; в) −15 и 6; г) −35 и 1.

114. а) 0 и 8; б) 15 и −10; в) −15 и −10; г) −38 и −1087.

115. а) 0,2 и 0,17; б) −0,2 и 0,1; в) 0 и −0,5; г) −0,7 и −0,8; д) −0,62 и −0,9; е) 1,4 и −1,28.

116. а) −0,2 и −0,17; б) 0 и 0,7; в) 0,06 и −6; г) −1,8 и −5,6; д) −7,85 и 7,9; е) 6,44 и −6,5.

117. а) $\frac{4}{9}$ и $-\frac{4}{9}$; б) $-\frac{3}{25}$ и $-\frac{9}{25}$; в) $3\frac{6}{19}$ и $-4\frac{5}{19}$; г) $\frac{1}{1999}$ и $-\frac{10}{1999}$; д) $-\frac{7}{15}$ и $-\frac{7}{23}$; е) $\frac{9}{14}$ и $-\frac{9}{10}$.

118. а) $-\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{8}$; б) $-\frac{6}{31}$ и $-\frac{2}{31}$; в) $-10\frac{4}{7}$ и $1\frac{2}{3}$; г) $-\frac{6}{355}$ и $-\frac{101}{355}$; д) $3\frac{5}{18}$ и $-3\frac{5}{41}$; е) $-7\frac{4}{7}$ и $-7\frac{4}{11}$.

119. Верно ли, что (подумайте, в каких случаях для обоснования вашего мнения достаточно привести один опровергающий или подтверждающий пример):

а) из двух чисел с одинаковыми знаками больше то, которое имеет больший модуль;

б) из двух чисел с разными знаками меньше то, которое имеет меньший модуль;

в) из двух положительных чисел больше то, которое имеет больший модуль;

г) из двух отрицательных чисел больше то, которое имеет меньший модуль?

(Устно.) Верно ли, что:

120. а) $-1 > 0$; б) $-10 < -5$; в) $-8 > 3$; г) $-18 < 45$?

121. а) $-5 < -10$; б) $-7 > -8$; в) $-5 < 1$; г) $-875 < -1$?

122. а) $-0{,}1 < 0$; в) $-6{,}6 > 1{,}1$;
б) $-0{,}1 < -0{,}01$; г) $-8{,}4 > -7{,}3$?

123. а) $0{,}01 < -0{,}1$; в) $-7{,}3 < 3{,}5$;
б) $-1{,}2 > -1{,}3$; г) $-0{,}975 < 0{,}35$?

124. а) $-\frac{3}{5} < 0$; б) $\frac{4}{11} > -\frac{9}{11}$; в) $1\frac{5}{14} > -2\frac{5}{14}$; г) $\frac{3}{221} < -\frac{200}{221}$?

125. а) $-\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$; б) $\frac{5}{12} < -\frac{11}{12}$; в) $-3\frac{7}{8} < -3\frac{5}{8}$; г) $-\frac{100}{103} < -\frac{10}{103}$?

126. (Устно.) Укажите все целые числа, которые можно подставить вместо x, чтобы получилось верное *двойное* неравенство:

а) $-3{,}5 < x < 2{,}1$; в) $-4 < x < 1{,}7$; д) $-7{,}1 < x < -4{,}8$;

б) $-1{,}2 < x < 4$; г) $-3 < x < 2\frac{2}{5}$; е) $-5 < x < -1{,}1$.

Верно ли, что:

127. а) $4 < 4{,}8 < 5$; в) $-6 < -6{,}7 < -7$; д) $-8{,}2 < -8{,}1 < -8{,}01$;

б) $-4 < -4{,}8 < -5$; г) $-5 < -4{,}8 < -4$; е) $-1{,}4 < -0{,}4 < -1$?

128. а) $7 < 7\frac{2}{3} < 8$; в) $-2 < -1\frac{2}{5} < -1$; д) $-1 < -1\frac{3}{4} < -3$;

б) $-8 < -7\frac{2}{3} < -7$; г) $-7 < -7\frac{2}{3} < -8$; е) $-4\frac{1}{8} < -3\frac{7}{8} < -4$?

129. а) $-35 < -34{,}7 < -34$; в) $-8 < -8\frac{1}{4} < -9$;

б) $-15 < -15{,}9 < -16$; г) $-28 < -27\frac{7}{18} < -27$?

130. Запишите числа в порядке возрастания:

а) 0, −10, 15, −8, −2, 4, −4, 12, −15, −25;

б) 0, 4, −16, −89, −123, −85, −46, −52, −270, −720;

в) 0, −0,01, 0,1, 0,01, −1,1, 1,01, −6,2, 5,4, −0,1 −7,3;

г) $0, \frac{3}{17}, -\frac{4}{17}, \frac{7}{17}, -\frac{8}{17}, 1\frac{1}{17}, -5, \frac{6}{17}, -\frac{3}{17}, 2\frac{5}{17}$.

131. Верно ли утверждение:

а) меньшее из двух отрицательных чисел имеет больший модуль;

б) меньшее из двух отрицательных чисел может иметь меньший модуль;

в) большее из двух положительных чисел имеет меньший модуль;

г) большее из двух положительных чисел не может иметь меньший модуль?

132. Приведите опровергающий пример для данного утверждения:

а) нуль больше любого неотрицательного числа;

б) нуль меньше любого неотрицательного числа;

в) нуль меньше любого неположительного числа;

г) нуль больше любого неположительного числа.

133. Верно ли, что:

а) из двух чисел с разными знаками больше то, которое имеет больший модуль;

б) большее из двух чисел с разными знаками может иметь больший модуль;

в) любое неотрицательное число больше любого неположительного числа;

г) большее из двух положительных чисел имеет больший модуль?

Замените знак $\vee$ знаком $>$ или $<$ так, чтобы получилось верное неравенство:

134. а) $29 \vee -610$; б) $-8 \vee -25$; в) $-18 \vee -51$; г) $-56 \vee -78$.

135. а) $10{,}2 \vee 10{,}8$; в) $-10{,}2 \vee 10{,}8$; д) $-16{,}4 \vee -16{,}8$;
б) $7{,}5 \vee 7{,}38$; г) $-7{,}5 \vee -7{,}38$; е) $-5{,}1 \vee -4{,}3$.

136. а) $-10{,}2 \vee -10{,}8$; в) $+7{,}5 \vee -7{,}38$; д) $-0{,}2 \vee -19{,}5$;
б) $-18 \vee +370$; г) $+10 \vee -188$; е) $-71 \vee -71{,}3$.

137. а) $-\frac{5}{12} \vee -\frac{7}{12}$; б) $\frac{3}{8} \vee -\frac{7}{8}$; в) $\frac{12}{17} \vee \frac{7}{17}$; г) $-2\frac{4}{9} \vee -2$.

138. Запишите следующее утверждение в виде неравенства:

а) $+5{,}7$ является положительным числом;

б) $-12{,}48$ является отрицательным числом;

в) m — число положительное;

г) n — число отрицательное;

д) a — число неположительное;

е) b — число неотрицательное.

139. Укажите все натуральные значения x, при которых верно неравенство:

а) $|x| < 5$; б) $|x| < 7$; в) $|x| \leqslant 3$; г) $|x| \leqslant 6$.

140. Укажите все целые значения x, при которых верно неравенство:

а) $|x| < 2$; б) $|x| < 4$; в) $|x| \leqslant 1$; г) $|x| \leqslant 8$.

141. Выполните действия:

а) $0{,}24 - (1{,}2 \cdot 0{,}15 + 12 : 100) : 1{,}25$;

б) $12 : 7{,}5 + 7{,}5 : 12 + 0{,}25 : 0{,}4 \cdot (5{,}1 - 3{,}86)$;

в) $5{,}632 : 51{,}2 + 4{,}256 : 3{,}8 - (3 - 0{,}39 : 0{,}15)$;

г) $(0{,}598 + 0{,}536) : 0{,}28 : (0{,}003 \cdot 5 + 0{,}029 \cdot 15)$.

142. Мама купила яблоки, апельсины, бананы и мандарины. Яблок было куплено x кг.

1. Запишите в виде выражения:

а) массу апельсинов, если их было куплено на 0,2 кг больше, чем яблок;

б) массу бананов, если она в 2,1 раза больше массы яблок;

в) массу мандаринов, если она на 0,9 кг больше, чем масса апельсинов.

2. Составьте математическую модель ситуации, если известно, что:

а) мандаринов было куплено столько же (по массе), сколько бананов;

б) всего мама купила 5,84 кг фруктов;

в) мандаринов было меньше, чем бананов, на 2,2 кг.

143. (Устно.)

а) Оптовая фирма по торговле компьютерным оборудованием закупила 200 процессоров разной частоты. Из них процессоры с частотой 333 МГц составили 48%, а с частотой 400 МГц — 23%. На сколько меньше было куплено процессоров с частотой 400 МГц, чем с частотой 333 МГц?

б) Магазин закупил различные кондитерские изделия. Из них печенье составило 35%, а пряники — 10% массы закупленных продуктов. Сколько килограммов кондитерских изделий закупил магазин, если пряников было закуплено на 30 кг меньше, чем печенья?

144. Флаг Нигерии поделен на три равные части. $\frac{1}{3}$ флага белая, а $\frac{2}{3}$ — зеленые. Определите, какая часть флага закрашена зеленым цветом в каждом случае (рис. 31) и найдите флаг Нигерии.

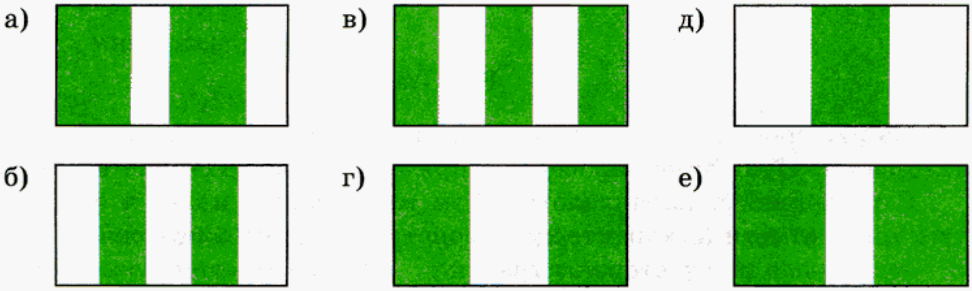


Рис. 31

145. Катя закрасила $\frac{5}{4}$ квадрата, а Даша — $1\frac{1}{4}$ (рис. 32). Определите, где рисунок Кати, а где — Даши.

Рис. 32

Контрольные вопросы и задания

1. Сравните координаты точек $A(-2,7)$ и $B(-1,7)$. Какая из этих точек расположена на координатной прямой левее?
2. Как называются числа, которые на координатной прямой изображаются левее начала отсчета?
3. Укажите большее и меньшее из чисел:

25,026; −45 876; $31\frac{2}{3}$; −0,02; 0; 1.

§ 5. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ

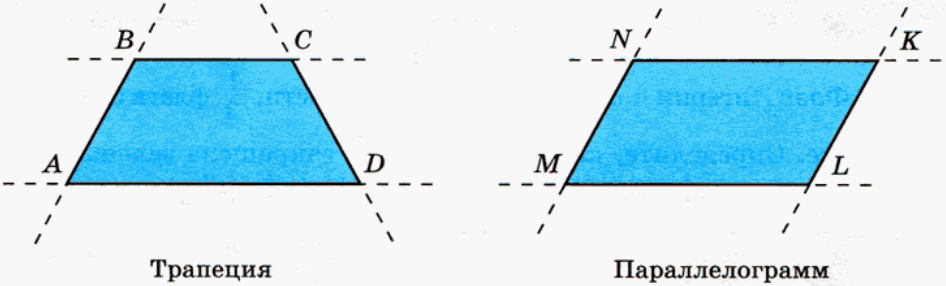


Рис. 33

На рисунке 33 изображены два четырехугольника: *трапеция* и *параллелограмм*. Пунктиром проведены прямые, продолжающие их стороны.

С трапецией и параллелограммом мы познакомились в 5-м классе и уже тогда заметили характерное свойство их противоположных сторон:

- если продолжить стороны трапеции, то две противоположные стороны пересекутся, а две другие — нет;

- у параллелограмма противоположные стороны не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

«Параллелос» в переводе с греческого языка означает «рядом идущие». Параллелограмм получил такое название, потому что прямые, являющиеся продолжением его противоположных сторон, «идут рядом» — не пересекаются. Прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, называют **параллельными**. Представление о параллельных прямых дают, например, железнодорожные или трамвайные рельсы на прямолинейных участках пути. Вы без труда найдете отрезки параллельных прямых среди предметов окружающей обстановки.

Для обозначения параллельности используют специальный символ $\parallel$. Запись $KN \parallel LM$ означает, что прямая KN параллельна прямой LM.

146. Запишите, какие прямые на рисунке 33 параллельны.

Заметим, однако, что *установить параллельность прямых на глаз невозможно*. Так, например, на фотографиях или рисунках, где изображены открытые участки земной поверхности, заведомо параллельные линии выглядят пересекающимися (рис. 34).

Рис. 34

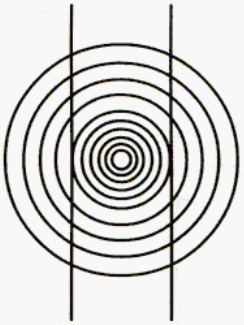


Рис. 35

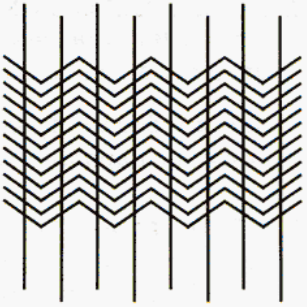


Рис. 36

Так что иногда «не верь глазам своим». Посмотрите на рисунок 35. Здесь возникает сомнение по поводу того, что вертикальные линии — прямые. А глядя на рисунок 36, трудно поверить, что проведенные прямые параллельны.

Но вы уже знаете, что обосновать, т. е. доказать, то или иное предположение можно при помощи рассуждений. Докажем параллельность противоположных сторон прямоугольника. Предположим, это неверно: стороны прямоугольника BC и AD (рис. 37) *непараллельны*, т. е. их можно продолжить настолько, что где-то, пусть очень далеко, они все же пересекутся. Обозначим точку их пересечения буквой K.

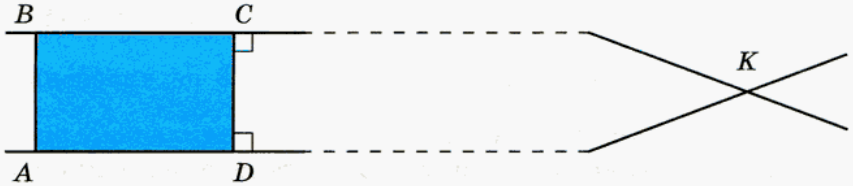


Рис. 37

Рассмотрите треугольник CKD. Все ли в порядке в этом треугольнике?

Вы, конечно, заметили, что в этом треугольнике сумма углов больше 180°. В самом деле, $\angle C = 90°$, $\angle D = 90°$, $\angle C + \angle D = 180°$, а ведь есть еще в треугольнике и угол K, значит, $\angle C + \angle D + \angle K > 180°$. Но такого быть не может (вы, наверное, помните, что сумма углов треугольника равна 180°), поэтому наше предположение о том, что прямые BC и AD могут пересечься, неверно. Значит, $BC \parallel AD$. Точно так же можно доказать, что $AB \parallel CD$. Вывод: противоположные стороны прямоугольника параллельны.

В старших классах вы научитесь доказывать параллельность прямых в более сложных случаях.

147. Скопируйте в тетрадь рисунок 38. Через отмеченные точки проведите прямые, параллельные заданной диагонали четырехугольника.

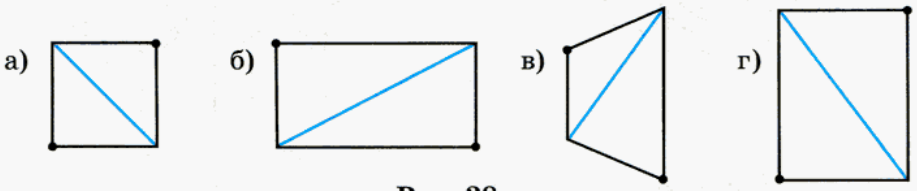


Рис. 38

148. Запишите, какие прямые (рис. 39), по вашему мнению, параллельны.

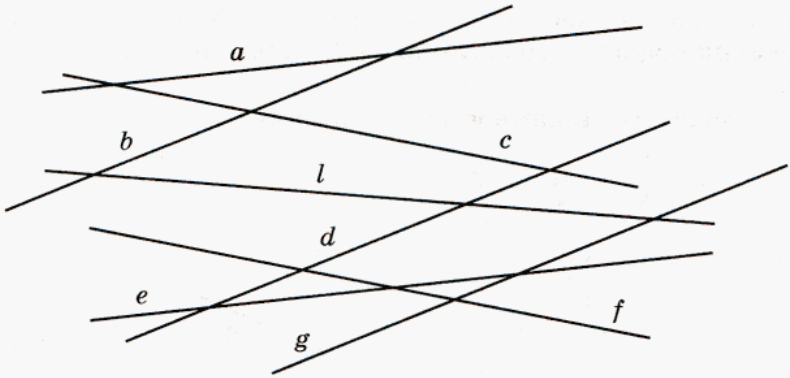


Рис. 39

149. Какие стороны многоугольников (рис. 40), по вашему мнению, параллельны (если такие есть)?

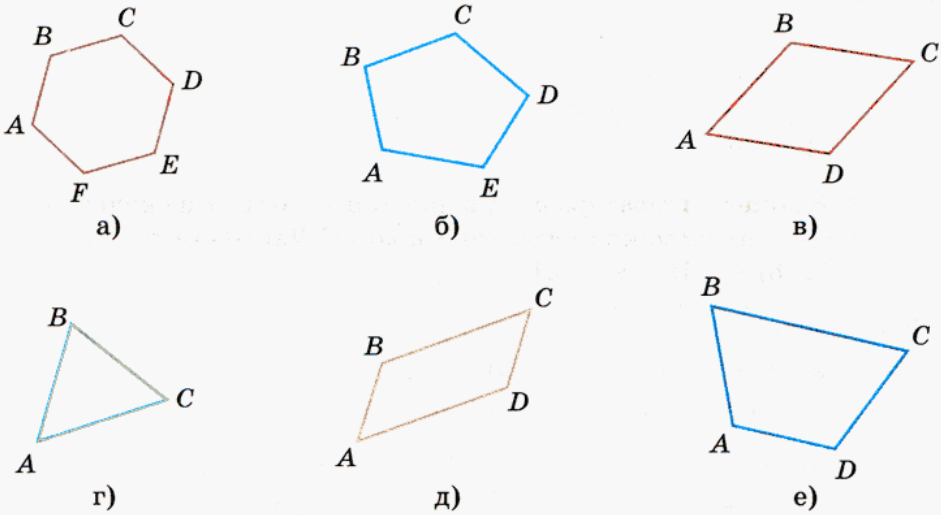


Рис. 40

150. Докажите, что если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти прямые параллельны.

151. Проведите прямую a и отметьте точки M и N вне ее (рис. 41). Опустите из этих точек перпендикуляры MM_1 и NN_1 на прямую a. Измерьте расстояние между точками M и N и между основаниями перпендикуляров — точками M_1 и N_1. Сравните полученные результаты.

Охарактеризуйте взаимное расположение прямых MM_1 и NN_1.

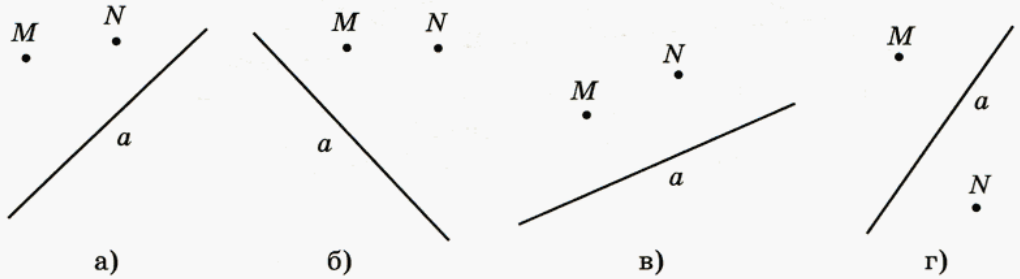


Рис. 41

152. Известно, что a и b — положительные числа, а x и y — отрицательные. Сравните:

а) 0 и x; a и 0; $-b$ и 0; 0 и $-x$;

б) a и x; y и b; $-y$ и x; $-a$ и b;

в) $|x|$ и x; $-|y|$ и y; a и $|a|$; b и $|-b|$;

г) $|x|$ и a; $|x|$ и $-x$; $|x|$ и $-|y|$; a и $|-b|$.

153. В доме температура a °C, а на улице — b °C. На сколько градусов температура на улице ниже, чем в доме? Дайте ответ при: а) $a = 23$, $b = 15$; б) $a = 18$, $b = -21$.

Вычислите:

154. а) $|1{,}8| + |-4|$; б) $|-1{,}5| - |1{,}2|$; в) $|-8{,}3| \cdot |2{,}5|$; г) $|-48| : |6|$; д) $|+3{,}14| - |-0{,}8|$; е) $|-2{,}7| : |+0{,}009|$.

155. а) $|-2{,}5| - |-0{,}31|$; б) $|-2{,}2| + |3{,}48|$; в) $|0{,}075| : |-30|$; г) $|-5{,}2| \cdot |-1{,}01|$; д) $|-0{,}08| : |-1{,}6|$; е) $|-17| - |+0{,}34|$.

156. Начало координат (рис. 42) перенесли на 4 единичных отрезка влево.

а) Какими стали координаты точек A, B, C, D, как они изменились?

б) Есть ли на прямой точки, координаты которых уменьшились?

в) Как изменились модули координат точек A, B, C, D?

г) Есть ли на прямой точки, модули координат которых не изменились?

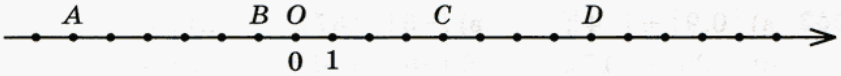


Рис. 42

157. Куда надо перенести начало координат, чтобы:

а) координаты всех точек увеличились на 3;

б) координаты всех точек уменьшились на 5;

в) модуль координаты точки $A(7)$ увеличился на 2; уменьшился на 3;

г) модуль координаты точки $A(5)$ не изменился?

158. Какое из данных чисел расположено на координатной прямой правее:

а) $\frac{2}{3}$ или $\frac{7}{9}$; б) $-\frac{2}{3}$ или $-\frac{7}{9}$; в) $\frac{2}{5}$ или $\frac{1}{3}$; г) $-\frac{2}{3}$ или $-\frac{5}{7}$?

159. Какое из данных чисел расположено на координатной прямой левее:

а) $\frac{4}{11}$ или $\frac{7}{22}$; в) $\frac{3}{8}$ или $\frac{4}{9}$; д) $-\frac{4}{5}$ или $-\frac{5}{6}$;

б) $-\frac{4}{11}$ или $-\frac{7}{22}$; г) $-\frac{1}{4}$ или $-\frac{2}{5}$; е) $\frac{7}{16}$ или $\frac{5}{8}$?

160. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$; в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$; д) $\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}$;

б) $-\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{9}$; г) $-\frac{5}{12}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}$; е) $-\frac{7}{10}, -\frac{8}{15}, -\frac{3}{5}$.

161. Расположите числа в порядке убывания:

а) $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}$; в) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{12}$; д) $\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{9}{25}$;

б) $-\frac{1}{6}, -\frac{2}{9}, -\frac{5}{12}$; г) $-\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}$; е) $\frac{21}{25}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}$.

162. Сравните числа:

а) $1\frac{7}{8}$ и $\frac{12}{8}$; б) $-\frac{14}{5}$ и $2\frac{4}{5}$; в) $2\frac{8}{15}$ и $\frac{32}{15}$; г) $-3\frac{3}{14}$ и $-\frac{51}{14}$.

Вычислите устно:

163. а) $|0{,}9| + |-4|$; в) $|-5| \cdot |37|$; д) $|0{,}56| : |-80|$;
б) $|-25| - |17|$; г) $|-6| : |30|$; е) $|-3| \cdot |-7{,}02|$.

164. Продолжительность летних каникул Сони 98 дней. $\frac{13}{49}$ этого периода она провела с мамой на даче, $\frac{2}{3}$ остального каникулярного времени — в летнем лагере, а оставшиеся дни — у бабушки в деревне. Сколько дней Соня гостила у бабушки?

Вычислите:

165. а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$; в) $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{4} - \frac{3}{5}$.

166. а) $\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right|$; б) $\left|-\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{4}{9}\right|$; в) $\left|\frac{4}{5}\right| + \left|-\frac{9}{10}\right|$; г) $\left|-\frac{3}{5}\right| - \left|\frac{3}{25}\right|$.

167. а) $\left|\frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right|$; б) $\left|\frac{2}{3}\right| - \left|-\frac{4}{9}\right|$; в) $\left|-\frac{7}{8}\right| - \left|+\frac{1}{4}\right|$; г) $\left|-\frac{17}{21}\right| - \left|\frac{3}{7}\right|$.

168. Дана прямая l и точка O вне этой прямой. Постройте прямую l', симметричную прямой l относительно центра O. Какое предположение можно сделать о взаимном расположении этих прямых: пересекаются они или параллельны?
Предположим, что эти прямые пересекаются в точке M. Что можно сказать о точке, которая ей симметрична?

Проверьте себя.

Поскольку точка M — это точка пересечения прямых l и l', то она принадлежит обеим этим прямым. Значит, симметричная ей точка тоже принадлежит обеим прямым. Но тогда прямые l и l' имеют две точки пересечения, а этого быть не может. Следовательно, эти прямые параллельны.

169. На плоскости расположены n точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждые две из данных точек соединены отрезком. Сколько всего проведено отрезков, если:

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) $n = 5$?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие прямые называют параллельными? Прочитайте запись: $AB \parallel EF$.
2. Приведите примеры параллельных прямых из окружающей обстановки.
3. Проведите прямую и отметьте точку вне этой прямой. Проведите через эту точку прямую, параллельную первой.

§ 6. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАКИ +, –

170. 1) Используя рисунок 43, запишите, как могут быть вычислены координаты точек A, B и C.

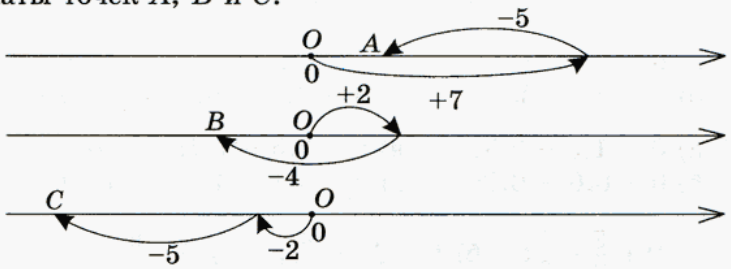


Рис. 43

Проверьте себя:

A: $0 + 7 - 5 = 2$; B: $0 + 2 - 4 = -2$; C: $0 - 2 - 5 = -7$.

2) Запишите аналогичные равенства для точек D, E, F, M, N, K (рис. 44).

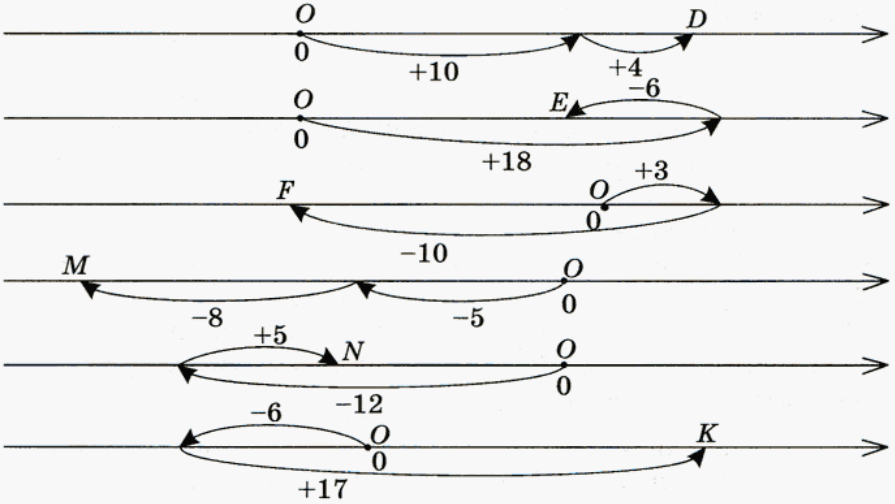


Рис. 44

Сделайте рисунок к данному выражению и найдите его значение:

171. а) $0 + 4 + 7$; б) $0 + 3 - 2$; в) $0 + 6 - 8$; г) $0 - 6 - 2$.

172. а) $0 + 7 + 4$; б) $0 - 2 + 3$; в) $0 - 8 + 6$; г) $0 - 2 - 6$.

173. После двух перемещений точки по координатной прямой от начала отсчета ее координата стала равной 10. Запишите в виде равенства, как могла перемещаться точка, если она:

а) оба раза передвигалась вправо;

б) первый раз передвинулась вправо, а второй — влево;

в) первый раз передвинулась влево, а второй — вправо.

Сделайте рисунок, соответствующий данному выражению, и найдите его значение:

174. а) $0 - 25 + 12$; в) $0 - 100 - 3$; д) $0 - 50 + 25$;
б) $0 - 25 + 35$; г) $0 + 40 - 20$; е) $0 + 70 - 170$;

175. а) $0 + 1{,}5 - 0{,}9$; в) $0 - 1{,}5 - 1{,}7$; д) $0 - 2{,}6 - 3{,}4$;
б) $0 - 0{,}6 + 0{,}2$; г) $0 - 3{,}8 + 4$; е) $0 + 7{,}1 - 8$.

176. а) $0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$; б) $0 - \frac{5}{11} - \frac{4}{11}$; в) $0 - \frac{6}{7} + \frac{2}{7}$; г) $0 + \frac{5}{12} - \frac{7}{12}$.

У **177.** 1) Сравните выражения: $0 + 5 - 8$; $+5 - 8$; $5 - 8$. Найдите их значения.

2) Подумайте, как с помощью координатной прямой найти значения таких выражений:

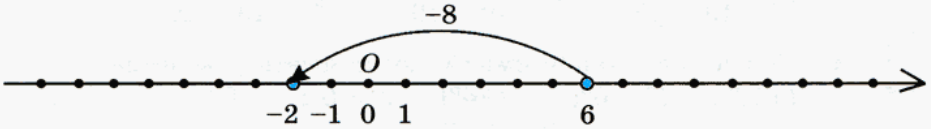
$$(+6) - 8; \quad (-4) + 3; \quad (+2) - 3; \quad (-5) + 7.$$

Проверьте себя.

1) Вычисляя значения выражений вида $0 + 5 - 8$, мы фактически рассматривали знаки + и − не как знаки действий сложения и вычитания, а как указатели направления движения вдоль координатной прямой: + — вправо, а − — влево. В этих случаях точка начинала свое движение по координатной прямой от начала отсчета, точки $O(0)$. Но она может начать движение и от любой другой точки. Выражения $+5 - 8$ и $5 - 8$ показывают, что движение начинается от точки с координатой $(+5)$ или 5, что одно и то же. Поэтому значения всех трех выражений равны -3:

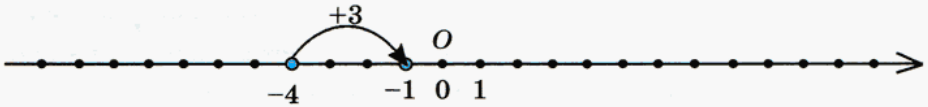
$$0 + 5 - 8 = -3;$$
$$+5 - 8 = -3;$$
$$5 - 8 = -3.$$

2) Чтобы найти значения данных выражений с помощью координатной прямой, рассматриваем перемещение точки в первом задании от точки с координатой (+6) (рис. 45), во втором — от точки с координатой (−4) (рис. 46).



(+6) − 8 = −2;

Рис. 45



(−4) + 3 = −1.

Рис. 46

Рисунки к выражениям (+2) − 3 и (−5) + 7 сделайте самостоятельно.

178. Укажите выражения, значения которых равны (ответ запишите в виде равенства):

(+15) + 9; −15 − 9; −15 + 9; (−15) − 9;
(−15) + 9; +15 − 9; +15 + 9; (+15) − 9.

Найдите значение выражения:

179. а) (+23) + 50; б) −23 − 50; в) (−23) + 50; г) +23 − 50.

180. а) −71 + 45; б) 71 − 45; в) (−71) − 45; г) (+71) + 45.

181. а) (−38) − 42; б) −38 + 42; в) 38 − 42; г) 38 + 42.

182. а) −6,8 + 2,5; б) −6,8 − 2,5; в) (+6,8) − 2,5; г) +6,8 + 2,5; д) (−2,5) − 6,8; е) (+2,5) − 6,8.

183. а) −4,27 − 7,3; б) (−4,27) + 7,3; в) 4,27 − 7,3; г) 4,27 + 7,3; д) (−7,3) − 4,27; е) (+7,3) − 4,27.

184. а) −9,4 − 3,6; б) −9,4 + 3,6; в) 9,4 − 3,6; г) (+9,4) + 3,6; д) (−3,6) + 9,4; е) (+3,6) − 9,4.

185. а) 0,76 − 2,5; б) (−0,76) − 2,5; в) −0,76 + 2,5; г) (+0,76) + 2,5; д) (−2,5) + 0,76; е) (+2,5) − 0,76.

186. а) $+\frac{15}{23}+\frac{8}{23}$; б) $\left(-\frac{15}{23}\right)-\frac{8}{23}$; в) $+\frac{15}{23}-\frac{8}{23}$; г) $-\frac{15}{23}+\frac{8}{23}$.

187. а) $+\frac{5}{19}-\frac{11}{19}$; б) $-\frac{5}{19}+\frac{11}{19}$; в) $-\frac{5}{19}-\frac{11}{19}$; г) $\left(+\frac{5}{19}\right)+\frac{11}{19}$.

У **188.** Объясните, какой смысл могут иметь равенства:
$(+10°) - 4° = 6°$; $(+6°) - 6° = 0°$; $0° - 3° = -3°$.

Проверьте, так ли вы рассуждали.

Все три равенства иллюстрируют понижение, т. е. уменьшение, температуры на определенное число градусов. Уменьшение величины на некоторое число в математике соответствует действию вычитания. Поэтому смысл каждого равенства можно объяснить так: начальное значение температуры уменьшается на данное число градусов и в результате получается конечное значение температуры.

189. Какие изменения температуры описывают следующие равенства:
а) $(+2) + 5 = 7$; в) $(-12) + 6 = -6$;
б) $(-10) + 15 = 5$; г) $(-1) + 8 = 7$?

190. Используя шкалу термометра, найдите значение выражения:
а) $(+4) - 7$; б) $(-4) + 7$; в) $(-4) - 7$; г) $(+4) + 7$.

Запишите каждое выражение без скобок и найдите его значение, считая, что знаки + и − показывают направление движения вдоль координатной прямой. Сравните полученный результат с тем, который был найден с помощью термометра.

Вычислите:

191. а) $(-7{,}28) - 4{,}3$; в) $(-7{,}28) + 4{,}3$; д) $(+4{,}8) + 5{,}2$;
б) $(+7{,}28) + 4{,}3$; г) $(+7{,}28) - 4{,}3$; е) $(-4{,}8) + 5{,}2$.

192. а) $(+9{,}4) + 15{,}78$; в) $(+9{,}4) - 15{,}78$; д) $(-4{,}8) - 5{,}2$;
б) $(-9{,}4) - 15{,}78$; г) $(-9{,}4) + 15{,}78$; е) $(+4{,}8) - 5{,}2$.

193. а) $\left(+\frac{7}{8}\right)+\frac{3}{8}$; б) $\left(-\frac{7}{8}\right)-\frac{3}{8}$; в) $\left(+\frac{7}{8}\right)-\frac{3}{8}$; г) $\left(-\frac{7}{8}\right)+\frac{3}{8}$.

194. а) $\left(+\frac{11}{15}\right)+\frac{4}{15}$; в) $\left(+\frac{11}{15}\right)-\frac{4}{15}$; д) $\left(-\frac{4}{15}\right)+\frac{11}{15}$;
б) $\left(-\frac{11}{15}\right)-\frac{4}{15}$; г) $\left(-\frac{11}{15}\right)+\frac{4}{15}$; е) $\left(-\frac{4}{15}\right)-\frac{11}{15}$.

195. Вычислите значения выражений $a + b$ и $a - b$. Значения a и b возьмите из таблицы.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	13	−13	0,75	−0,75	2,27	−2,27	$\frac{15}{22}$	$-\frac{15}{22}$
b	15	15	0,25	0,25	3,58	3,58	$\frac{13}{22}$	$\frac{13}{22}$

Вычисления оформите по образцу:

$$a + b = (-13) + 15 = -13 + 15 = 2,$$
$$a - b = (-13) - 15 = -13 - 15 = -28.$$

Вычислите:

196. а) $\frac{3}{8} + 1$; $-\frac{3}{8} - 1$; $-\frac{3}{8} + 1$; $\frac{3}{8} - 1$;

б) $1 + \frac{4}{11}$; $1 - \frac{4}{11}$; $-1 - \frac{4}{11}$; $(-1) + \frac{4}{11}$;

в) $4 + \frac{2}{3}$; $-4 + \frac{2}{3}$; $(-4) - \frac{2}{3}$; $4 - \frac{2}{3}$;

г) $2 + \frac{8}{15}$; $-2 - \frac{8}{15}$; $2 - \frac{8}{15}$; $-2 + \frac{8}{15}$.

197. а) $\frac{7}{8} + \frac{3}{4}$; б) $-\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$; в) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$; г) $-\frac{7}{8} + \frac{3}{4}$.

198. а) $\frac{11}{15} + \frac{4}{5}$; б) $-\frac{11}{15} - \frac{4}{5}$; в) $+\frac{11}{15} - \frac{4}{5}$; г) $-\frac{11}{15} + \frac{4}{5}$.

При денежных расчетах величину прибыли (дохода) обозначают положительным числом, а убытки (долг или расход) — отрицательным. Например, выражение $0 + 5 - 1 - 2$ можно расшифровать так: начальный капитал предпринимателя был равен 0. Для того чтобы начать свое дело, он взял некоторую ссуду (долг) в банке, например в размере 1,6 млн р. На эти деньги он приобрел товар, который был продан за 5 млн р., т. е. он получил доход, равный +5. При этом

расходы на реализацию товара составили 1 млн р. Кроме того, банку была возвращена ссуда, которая вместе с процентами составила сумму в размере 2 млн р. Значит, чистая прибыль (итоговый капитал) предпринимателя может быть вычислена так:

начальный капитал	прибыль	расходы на реализацию	долг банку	чистая прибыль
0	+5	−1	−2	= 2

т. е. $0 + 5 - 1 - 2 = +2$.

До сих пор, вычисляя значения таких выражений, мы рассматривали знаки «плюс» и «минус» как указатели движения по координатной прямой. Итоговый капитал вычисляется как **сумма** доходов и расходов, где расходы записывают в виде отрицательного числа. Поэтому выражение для вычисления итогового капитала можно записать как сумму нуля, положительного и двух отрицательных чисел, где отрицательные числа показывают расходы, а положительное — доходы:

$$0 \quad +5 \quad -2 \quad -1 \quad = +2,$$

$$0 + (+5) + (-1) + (-2) = +2.$$

Сравнивая эти два выражения, видим, что один и тот же результат можно получить, рассматривая перемещение точки вдоль координатной прямой и складывая доходы и расходы, где величины расходов записаны с помощью отрицательных чисел.

199. Используя понятия «доходы» и «расходы» или «прибыль» и «убытки», объясните смысл выражения $0 + (-8) + (+6)$. Запишите это выражение без скобок и найдите его значение.

Заметим, что, как и при вычислениях с помощью координатной прямой, число 0 в начале выражения обычно не записывают.

200. Используя понятия «долг», «прибыль» и т. п., объясните (устно) смысл выражения, запишите его без скобок и найдите его значение:

1) $(-7) + (+5)$;
2) $(-7) + (-5)$;
3) $(+5) + (-7)$;
4) $(-5) + (-7)$;
5) $(+5) + (+7)$;
6) $(+7) + (+5)$.

Запишите выражение без скобок и найдите его значение:

201. а) $(+11) + 17$; в) $(-37) + (-63)$; д) $(-26) + (-12)$;
б) $25 + (-30)$; г) $(-52) + (+32)$; е) $(-34) + (-21)$.

202. а) $(-12) + 8$; в) $(+48) + (-31)$; д) $(+78) + (-96)$;
б) $-44 + (-20)$; г) $(-28) + (-42)$; е) $(-59) + (-22)$.

203. Представьте выражение в виде суммы положительных и отрицательных чисел:

а) $-8 + 12 - 34$; в) $-32 + 17 + 13$;
б) $-15 - 25 + 40$; г) $-8 + 15 - 8$.

Объясните смысл выражения тремя способами:

- как движение вдоль координатной прямой;
- как изменение температуры;
- с использованием понятий «доход» и «расход» (представив его в виде суммы).

Найдите значение выражения:

204. а) $-16 + 8$; б) $-9 + 15$; в) $19 - 12$; г) $-14 - 16$.

205. а) $20 - 35$; б) $-6 - 21$; в) $12 - 19$; г) $+14 + 16$.

206. Найдите значение выражения, рассуждая удобным для вас способом:

а) $-200 - 300$; в) $-300 + 200$; д) $-300 - 200$;
б) $-200 + 300$; г) $200 - 300$; е) $+200 + 300$.

Запишите выражение без скобок и найдите его значение:

207. а) $(-5) + (-6) + 25$; в) $(-28) + 12 + (-15)$;
б) $+15 + (-48) - 52$; г) $16 + (-20) + 4$.

208. а) $-2{,}8 + (+1{,}4) + 2{,}3$; в) $17{,}4 - 56 + (+22{,}6)$;
б) $-5{,}2 + 8{,}3 + (-5{,}2)$; г) $(-2{,}3) + 7{,}8 + 2{,}2$.

209. а) $-3{,}15 + (-5{,}25) + 4$; в) $-24{,}8 + 60 + (-35{,}2)$;
б) $10 + (-4{,}3) - 9{,}7$; г) $-15 + (+3{,}4) + 6{,}6$.

Вычислите:

210. а) $-\frac{5}{7} + \frac{2}{7}$; б) $-\frac{7}{40} - \frac{3}{40}$; в) $-\frac{9}{32} - \frac{7}{32}$; г) $\frac{11}{21} - \frac{16}{21}$.

211. а) $-\frac{3}{16} - \frac{5}{16}$; б) $-\frac{8}{15} + \frac{13}{15}$; в) $\frac{7}{18} - \frac{17}{18}$; г) $-\frac{5}{48} - \frac{7}{48}$.

212. а) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$; б) $-\frac{7}{15}-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$; г) $-\frac{2}{6}+\frac{7}{9}$.

213. а) $\frac{15}{16}-\frac{5}{8}$; б) $\frac{4}{9}+\frac{1}{27}$; в) $\frac{5}{12}-\frac{7}{8}$; г) $-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$.

214. Не выполняя вычислений, сравните:

а) $-15+8$ и -15; в) $25-73$ и -73;

б) $-2{,}3-4{,}5$ и $-2{,}3$; г) $-9{,}1+(-2)$ и -2.

215. Пешеход идет со скоростью x км/ч, а велосипедист едет на 8 км/ч быстрее.

Запишите в виде выражения:

- скорость велосипедиста;
- скорость сближения пешехода и велосипедиста при движении навстречу друг другу;
- время до встречи, если расстояние между ними до начала движения — 19,2 км;
- расстояние между ними, если время до встречи — 1,2 ч.

Составьте уравнение, если известно, что пешеход и велосипедист двигались навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 19,2 км, и встретились через 1,2 ч.

216. В баке одного автомобиля 80 л бензина, а в баке другого — 90 л. Первый автомобиль расходует на 100 км пути x л бензина, а второй — в 1,2 раза больше.

а) Расшифруйте выражения:

$$1{,}2x;\quad 4x;\quad 4\cdot 1{,}2x;\quad 80-4x;\quad 90-4\cdot 1{,}2x.$$

б) Что в условиях данной задачи означает математическая модель

$$80-4x=90-4\cdot 1{,}2x?$$

217. После реконструкции автомобильного завода годовой выпуск автомобилей увеличился на 22%. Сколько автомобилей в год стал выпускать завод, если до этого он выпускал 1 280 000 автомобилей в год?

218. Усовершенствованная модель телевизора дороже старой на 648 р. Найдите новую цену телевизора, если она выше старой на 8%.

219. Маше подарили коробку конфет. Съев одну конфету, она отдала половину оставшихся конфет сестре. Съев еще одну конфету, она отдала брату половину оставшихся. После этого в коробке у Маши осталось 5 конфет. Сколько конфет было в коробке первоначально?

220. Дано 5 прямых: a, b, c, d, m. Известно, что какие-то две из них (и только две) параллельны. Сколько существует комбинаций, удовлетворяющих этому условию?

Контрольные задания

1. Объясните смысл выражения $3 + 6 - 8 + 10$:
   а) как изменение температуры;
   б) как движение вдоль координатной прямой;
   в) с использованием понятий «долг» и «прибыль».
   Запишите это выражение в виде суммы положительных и отрицательных чисел.
2. Найдите значение выражения: а) $-12 + 7 - 4 + 9$; б) $(-2) + (-3) + 8$.

§ 7. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА И ЕЕ СВОЙСТВА

221. Вычислите:

$-6 + 5$;	$-8 + 2$;	$-4 - 6$;	$-1 - 3$;
$+5 - 6$;	$2 - 8$;	$-6 - 4$;	$-3 - 1$.

Что вы заметили? Постарайтесь объяснить, почему выражения, записанные в столбцах, имеют одинаковые значения.

Проверьте себя.

I способ.

Мы знаем, что эти выражения можно рассматривать как описание перемещений точки по координатной прямой от начала отсчета. Например,

$$-6 + 5 = 0 - 6 + 5, \qquad +5 - 6 = 0 + 5 - 6.$$

Оба эти перемещения состоят из движения вправо на 5 и влево на 6 единиц. Понятно, что порядок, в котором точка выполняет эти перемещения, на ее конечное положение не влияет.

II способ.

Рассмотрим эти выражения как описание финансовой деятельности. В обоих выражениях $-6 + 5$ и $+5 - 6$ отражены доходы и расходы. Очевидно, что для конечного результата не имеет значения, как развивались события:

вначале предприятие произвело затраты (−6), а затем получило прибыль (+5) и в результате оказалось в убытке (−1)

или, наоборот,

вначале была получена прибыль (+5), а затем выяснилось, что необходимо произвести некоторые выплаты (−6), сумма которых превышает размер прибыли, в результате чего предприятие оказалось в убытке (−1).

У **222.** Постарайтесь найти рациональный способ вычисления и проверьте себя, выполняя действия в том порядке, в котором они записаны:

1) 27 + 5 − 27;
2) −28 + 4 + 24;
3) 45 − 23 − 22;
4) 8 − 35 + 35;
5) 53 − 45 − 53;
6) −71 + 22 + 71;
7) 4,2 +0,3 − 4,5;
8) 3,54 − 2,74 + 2,2.

Какие законы арифметических действий напоминают те приемы, которые вы использовали для упрощения вычислений?

У **223.** 1) Прочитайте выражение и найдите его значение:

а) (+4) + (−5);
б) (−5) + (+4);
в) (−8) + (−2);
г) (−2) + (−8).

2) Сравните выражения а) и б), в) и г). Сравните их значения.

3) Какое предположение можно сделать?

Проверьте себя.

Каждое из данных выражений является суммой либо положительного и отрицательного, либо двух отрицательных чисел. Выражения б) и г) отличаются от выражений а) и в) тем, что слагаемые в них стоят в обратном порядке. Значения выражений, содержащих одинаковые слагаемые, равны. Поэтому можно предположить, что при сложении чисел любых знаков справедлив переместительный закон.

У **224.** Выражения, данные в упражнении № 221, представьте в виде суммы и запишите, какие из них равны.

225. Не вычисляя, определите, какие из данных выражений имеют равные значения:

а) −18 + 25; −25 + 18; 18 − 25; 25 − 18;

б) 54 − 28; −28 + 54; −28 − 54; −54 − 28.

Проверьте себя, выполнив вычисления.

226. Выражение $-48 + 35 - 52$ представьте в виде суммы положительных и отрицательных чисел. Подумайте, как можно упростить вычисления, и покажите, как это можно сделать.

Проверьте себя.

Мы знаем, что знаки + и − указывают направление перемещения вдоль координатной прямой. С другой стороны, мы знаем, что выражения, содержащие только знаки + и −, можно представить в виде суммы положительных и отрицательных чисел. Ранее мы убедились, что результат не зависит от того, в каком порядке производятся перемещения и от какой точки начинается движение. Это значит, что для суммы положительных и отрицательных чисел справедливы известные нам законы арифметических действий: переместительный и сочетательный.

Применяя эти законы, задание можно выполнить так:

$-48 + 35 - 52 = (-48) + (+35) + (-52) = ((-48) + (-52)) + (+35) = (-48 - 52) + (+35) = (-100) + (+35) = -100 + 35 = -65.$

Или так: $-48 + 35 - 52 = (-48) + (+35) + (-52) = (+35) + ((-48) + (-52)) = (+35) + (-48 - 52) = (+35) + (-100) = 35 - 100 = -65.$

Выражения, содержащие числа, знаки + и −, можно представить в виде суммы положительных и отрицательных чисел. Такие выражения называют **алгебраическими суммами**. Каждое слагаемое алгебраической суммы представляет собой число вместе с тем знаком, который стоит (или подразумевается, что стоит) перед ним, а законы арифметических действий применяются именно к этим слагаемым.

227. (Устно.) Назовите слагаемые алгебраической суммы:

а) $-24 + 33 - 8 - 12$;
б) $56 + 32 - 70 - 65$;
в) $-61 + (-29) + 12 + 7$;
г) $+3 - 8 + (+7) + 5$.

228. Запишите данное выражение без скобок:

а) $(+33) + (-87) + (-13)$;
б) $(-45) + (-24) + (-15)$;
в) $(-29) + (+71) + (-95)$;
г) $(+25) + (-15) + (+32)$.

229. Можно ли утверждать, что данные выражения являются алгебраическими суммами:

1) $48 + (-25) - 34$;
2) $-71 + (-3) + 28$;
3) $-(-56) + (-18) - 21$;
4) $12 - (-59) - 45$;
5) $-83 - 44 - (-75)$;
6) $-(-48) - (-24) - (-76)$?

Проверьте себя.

Алгебраическая сумма — это выражение, которое можно представить в виде суммы положительных и отрицательных чисел. Попробуем это сделать.

Первые два задания не должны вызвать затруднений. Поэтому рассмотрим, как можно преобразовать выражения 3) и 4).

Воспользуемся тем, что $-(-a) = a$:

3) $-(-56) + (-18) - 21 = +56 + (-18) - 21 = (+56) + (-18) + (-21)$;

4) $12 - (-59) - 45 = (+12) + (-(-59)) + (-45) = (+12) + (+59) + (-45)$.

Преобразование выражений 5) и 6) выполняются аналогично.

Теперь можно ответить на поставленный вопрос: все данные выражения являются алгебраическими суммами.

Запишите все данные в этом упражнении выражения без скобок и найдите их значения.

Назовите слагаемые алгебраической суммы, запишите выражение без скобок и найдите его значение:

230. а) $54 - 48 + (-26) - (-46)$; б) $-37 + (-24) - (-20) + 17$.

231. а) $29 + (-29) - 75 - (-75)$; б) $(-50) - (-96) + (-46) - 11$.

232. а) $(-19) - (-10) - (-9) + 6$; б) $99 - (-41) - 72 + 31$.

Назовите слагаемые и, используя законы арифметических действий, вычислите значение выражения:

233. а) $71 + 29 - 54 - 6$; б) $-57 + 17 + 40 - 6$.

234. а) $25 - 91 - 99 + 15$; б) $-18 - 22 + 64 + 36$.

235. а) $-35 + 30 - 25 + 70$; б) $53 + 18 - 48 - 23$.

Вычислите:

236. а) $3{,}4 - 7{,}2 - 2{,}8 + 6{,}6$; б) $-98{,}4 - 52{,}06 + 25{,}2 + 25{,}26$.

237. а) $-5{,}1 + 8{,}3 + 8{,}7 - 4{,}9$; б) $43{,}52 + 47{,}3 - 60{,}8 - 100{,}05$.

238. а) $29{,}6 - 54{,}49 + 70{,}4 - 55{,}41$;
б) $-31{,}6 + 11{,}08 - 31{,}04 + 62{,}64$.

Назовите слагаемые и представьте выражение в виде суммы:

239. а) $-7 + x$; б) $-a - 23 + b$; в) $5 - p - t$; г) $71 + m - n$.

240. а) $y - 9$; б) $-4 - b + a$; в) $-c - 8 - d$; г) $-m - n - k$.

241. Составьте сумму из данных слагаемых, запишите ее со скобками и без скобок:

а) -8, $-a$, b; в) -5, m, -7, $-n$;
б) $-c$, -3, $-d$; г) $-x$, 9, -4, $-y$.

242. Найдите значение выражения:

а) $a + b$ при $a = 30$, $b = -100$; б) $a - b$ при $a = -39$, $b = -16$.

243. Найдите t:

а) $[m = 23 - 34] \to [n = 22 + m] \to [k = 2n - 100] \to$
$\to [l = 16 + k] \to [s = l + 48] \to [t = 2 + s]$;

б) $[m = 28 - 49] \to [n = 115 + m] \to [k = 2n - 100] \to$
$\to [l = -22 + k] \to [s = l + 33] \to [t = -4 + s]$.

244. Найдите значение выражения $a + b + (-18)$, если:

а) $a = 15$, $b = -17$; в) $a = -40$, $b = 25$;
б) $a = -14$, $b = -12$; г) $a = +16$, $b = -28$.

Вычислите:

245. а) $2 + \frac{5}{8}$; $-2 - \frac{5}{8}$; $2 - \frac{5}{8}$; $-2 + \frac{5}{8}$;

б) $\frac{3}{4} + 1$; $-\frac{3}{4} - 1$; $-\frac{3}{4} + 1$; $\frac{3}{4} - 1$;

в) $1 + \frac{3}{7}$; $1 - \frac{3}{7}$; $-1 - \frac{3}{7}$; $-1 + \frac{3}{7}$;

г) $4 + \frac{2}{9}$; $-4 + \frac{2}{9}$; $-4 - \frac{2}{9}$; $-\frac{2}{9} + 4$.

246. а) $-4 - \frac{2}{9} + 2 + \frac{5}{9}$; в) $-2 - \frac{5}{9} - 4 - \frac{2}{9}$; д) $-3 - \frac{4}{11} + 2 + \frac{5}{11}$;

б) $+3 + \frac{4}{7} - 5 - \frac{2}{7}$; г) $-1 - \frac{3}{17} + 2 + \frac{5}{17}$; е) $+1 - \frac{8}{15} - 3 - \frac{7}{15}$.

247. Укажите выражения, имеющие равные значения:

$1 + \frac{3}{17} + 2 + \frac{5}{17}$; $-1 - \frac{3}{17} - 2 - \frac{5}{17}$; $-1\frac{3}{17} - 2\frac{5}{17}$;

$1 + \frac{3}{17} - 2 - \frac{5}{17}$; $1\frac{3}{17} - 2\frac{5}{17}$; $-1\frac{3}{17} + 2\frac{5}{17}$.

$-1 - \frac{3}{17} + 2 + \frac{5}{17}$; $1\frac{3}{17} + 2\frac{5}{17}$;

248. Вычислите:

а) $+4\frac{2}{9} + 3\frac{5}{9}$; б) $-4\frac{2}{9} - 3\frac{5}{9}$; в) $4\frac{2}{9} - 3\frac{5}{9}$; г) $-4\frac{2}{9} + 3\frac{5}{9}$.

Найдите значение выражения:

249. а) $-\frac{7}{15} + \frac{13}{30}$; б) $-\frac{5}{18} + \frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$; г) $-\frac{7}{12} - \frac{11}{30}$.

250. а) $\frac{8}{25} - \frac{4}{5}$; б) $-\frac{2}{7} - \frac{17}{42}$; в) $\frac{3}{10} - \frac{8}{15}$; г) $-\frac{19}{30} + \frac{14}{45}$.

251. Сторона AB треугольника ABC равна a см.

1. Составьте выражения:
   а) для длины BC, если она на 3 см больше длины AB;
   б) для длины AC, если она в 1,5 раза больше длины AB;
   в) для периметра треугольника ABC.
2. Составьте уравнение при условии, что периметр треугольника равен 31 см.
3. Найдите длины сторон треугольника.

252. Заполните таблицу:

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
$x + 2$							

253. Заполните таблицу:

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
$4 + x$							

254. Время разгона автомобиля — это время, за которое автомобиль способен развить скорость 100 км/ч. Время разгона автомобиля «Мерседес» составляет 6,5 с, а у автомобиля «Ауди» это время на 15% меньше. Найдите время разгона автомобиля «Ауди».

255. Аббревиатура ПДК расшифровывается как «предельно допустимая концентрация». Этот термин используется, когда речь идет о количестве вредных для здоровья примесей в воде, воздухе или продуктах. Так, ПДК углекислого газа (углекислоты), который в основном образуется от автомобильных выхлопов, составляет 2,5%. В настоящее время в центре Москвы превышение ПДК в тихую, безветренную погоду стало довольно частым явлением.

1. Определите процентное содержание углекислого газа в воздухе, если оно:

а) составляет 12% ПДК; б) превышает ПДК на 35%.

2. Специальные *катализаторы* могут уменьшить вредные выбросы автомобиля на 70%. Определите, за сколько часов автомобиль без катализатора выбросит в атмосферу то же количество углекислоты, что и такой же автомобиль, но оснащенный катализатором, за 15 часов.

256. Налог на прибыль с торгового предприятия в 1999 году составлял 30%. Из них 13% перечислялось в федеральный бюджет, а 17% — в городской. Какой налог на прибыль заплатило предприятие, если сумма его прибыли за год составила 42 571 256 р. 51 к.? Какая сумма была перечислена в федеральный бюджет, а какая — в городской? (Ответ округлите до тысяч рублей.)

257. На координатной прямой отмечены точки $A(-1{,}56)$ и $B(5{,}43)$. Найдите координату точки M — середины отрезка AB. Чем является координата середины отрезка по отношению к координатам его концов?

Контрольные вопросы и задания

1. Почему выражение $-5 + 8 - 11$ называют алгебраической суммой? Назовите ее слагаемые и запишите данное выражение в виде суммы положительных и отрицательных чисел.
2. Вычислите: $-24{,}47 + 30{,}29 - 35{,}53 + 44{,}71$.

§ 8. ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ ДВУХ ЧИСЕЛ

258. 1) Найдите значения выражений (запишите ответ в виде равенства):

$-6 - 8$	$-6 + 8$
$+6 + 8$	$+6 - 8$
$-2 - 11$	$-2 + 11$
$+11 + 2$	$-11 + 2$

2) В полученных равенствах представьте левую часть в виде суммы.

3) Что можно сказать о знаках слагаемых первого столбца? второго столбца?

4) В каждом случае сравните знак суммы со знаками слагаемых. Сделайте вывод.

5) Для выражений первого столбца найдите модуль суммы и сумму модулей слагаемых. Сравните полученные результаты. Сделайте вывод.

6) Для выражений второго столбца найдите модуль суммы и разность модулей слагаемых, вычитая из большего модуля меньший. Сравните полученные результаты. Сделайте вывод.

7) Постарайтесь сформулировать правило нахождения *знака суммы* и *модуля суммы*, если слагаемые имеют:

а) одинаковые знаки; б) разные знаки.

8) Используя это правило, найдите значения выражений:

$(+16) + (+4)$	$(+8) + (+2)$	$7 + 12$	$15 + 11$
$(+16) + (-4)$	$(-8) + (-2)$	$7 - 12$	$-15 + 11$
$(-16) + (-4)$	$(-8) + (+2)$	$-7 + 12$	$-15 - 11$
$(-16) + (+4)$	$(+8) + (-2)$	$-7 - 12$	$15 - 11$

Проверьте себя.

Закономерность, которую вы должны были установить, — это *правило вычисления значения алгебраической суммы*:

1) *Если слагаемые имеют <u>одинаковые знаки</u>, то сумма имеет тот же знак, что и слагаемые, а модуль суммы равен сумме модулей слагаемых.*

2) *Если слагаемые имеют <u>разные знаки</u>, то сумма имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем, а модуль суммы равен*

разности модулей слагаемых при условии, что из большего модуля вычитается меньший.

Пример 1. Рассмотрим выражение (−16) + (−4). Здесь рассуждаем так: оба слагаемых имеют один и тот же знак −, значит, и сумма имеет знак −; далее, складываем модули 16 + 4 = 20 и в итоге получаем −20:

$$(-16) + (-4) = -20.$$

Пример 2. Рассмотрим выражение (+16) + (−4). Здесь слагаемые имеют разные знаки, причем слагаемое с большим модулем имеет знак +, поэтому и сумма имеет знак +. Далее, 16 − 4 = 12 (разность модулей), и в итоге получаем +12:

$$(+16) + (-4) = 12.$$

259. (Устно.) Вычислите двумя способами:

— иллюстрируя вычисления перемещениями точки по координатной прямой;

— представляя данное выражение в виде суммы и применяя правило вычисления алгебраической суммы.

а) 3 + 6;	б) 59 + 41;	в) 4,3 + 2,56;	г) 5,7 + 8,94;
−3 + 6;	−59 − 41;	4,3 − 2,56;	−5,7 − 8,94;
−3 − 6;	−59 + 41;	−4,3 + 2,56;	−5,7 + 8,94;
3 − 6;	59 − 41;	−4,3 − 2,56;	5,7 − 8,94.

260. Чему равна сумма противоположных чисел? Можно ли ее найти по правилу вычисления значения алгебраической суммы?

261. Можно ли применить правило вычисления значения алгебраической суммы, если одно из слагаемых равно нулю?

Найдите значение выражения устно, используя правило вычисления алгебраической суммы:

262. а) 5,3 + (−5,3); в) 3,2 + (−3,2);
б) 3 + (−1); г) (−2,5) + 2,5.

263. а) 0 + (−2,1); б) 0 + (−3,8); в) −3 + (−5); г) (−8) + 3,1.

264. а) −25 − 34 + 25 − 66; в) 78 − 42 − 18 + 52;
б) −18 + 3 + 15 − 17; г) 19 − 87 + 41 − 13.

265. а) $-78 + 20 + 26 - 46 - 100 - 22$;
б) $-51 - 37 - 22 + 59 + 24 + 27$.

$$a + (-a) = 0$$

Вычислите:

266. а) $0{,}12 + (-0{,}05) + 3{,}4 - (-6)$;
б) $-1{,}018 - 4{,}29 - (-0{,}5) + (-4)$;
в) $0{,}546 + (-1{,}2) - (-12{,}8) - 7{,}09$;
г) $6{,}208 - 2{,}73 - (-3{,}792) - 4{,}65$.

267. а) $(-4{,}49) - (-0{,}57) + 2{,}44 - 8{,}101 - 0{,}57 - (-4{,}49)$;
б) $-4{,}36 + 4{,}306 + (-8{,}8) - (-9{,}854) - (+4{,}306) + 8{,}8$.

Найдите значение выражения:

268. а) $\left(-\frac{3}{14}\right) + \left(-\frac{5}{14}\right) - \left(-\frac{1}{14}\right)$;
б) $-\frac{7}{15} - \left(-\frac{2}{15}\right) + \left(-\frac{4}{15}\right)$;
в) $-\left(-\frac{4}{23}\right) - \frac{7}{23} - \frac{20}{23}$;
г) $\frac{5}{22} - \left(-\frac{7}{22}\right) - \frac{1}{22}$.

269. а) $\left(-1\frac{4}{11}\right) + \left(-1\frac{2}{11}\right) - \left(-1\frac{4}{11}\right)$;
б) $2\frac{5}{8} + \left(-2\frac{1}{8}\right) - \left(-1\frac{1}{2}\right)$;
в) $-3\frac{1}{2} - \left(-2\frac{5}{12}\right) + 1\frac{1}{12}$;
г) $-\left(-4\frac{3}{16}\right) + \left(-2\frac{1}{2}\right) + 3\frac{5}{16}$.

270. Какими должны быть числа x и y, чтобы было верным равенство:
а) $x - y = 0$; б) $x + y = 0$?

271. Подумайте, верно ли утверждение: «*Если сумма двух чисел равна нулю, то эти числа — противоположные*».

Вычислите:

272. а) $(41 - 20) - 34$;
б) $52 - (33 + 48)$;
в) $-(3{,}2 - 5{,}12) + 4{,}8$;
г) $(-8{,}43 + 2{,}7) - 12{,}9$.

273. а) $-13 + (29 - 45)$;
б) $-18 - (-25 - 31)$;
в) $25{,}4 - (3{,}6 - 15{,}92)$;
г) $-47{,}3 + (-90 + 26{,}1)$.

274. а) $\frac{14}{31} + \left(-\frac{20}{31} + \frac{16}{31}\right)$;
б) $-\frac{18}{25} - \left(\frac{24}{25} - \frac{12}{25}\right)$.

275. Модули слагаемых суммы $a + b + c + d$ равны, соответственно, 1, 2, 3, 4. Рассматривают всевозможные комбинации знаков чисел a, b, c и d. Сколько существует таких комбинаций? Чему равны наибольшее и наименьшее возможные значения суммы $a + b + c + d$?

О **276.** Сумма пяти последовательных целых чисел равна 0. Какие это числа?

277. Длина одной из сторон треугольника x см.

а) Что могут означать выражения $x - 6$, $1{,}25x$?

б) Что означает математическая модель

$$x + (x - 6) + 1{,}25x = 33?$$

278. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = x$ см.

Выразите остальные стороны этого четырехугольника, если:

BC на 1 см меньше AB;

CD в 1,52 раза больше AB;

AD на 1 см больше CD.

Составьте уравнение, зная, что периметр $ABCD$ равен 12,6 см. Решите полученное уравнение. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

Заполните таблицу:

279.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$x - 2$							

280.

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
$4 - x$							

При решении следующих задач будьте особенно внимательны определяя величины, которые приняты за 100%.

У **281.** Мотоциклист проехал 120 км, 30% из которых — по шоссе. 60% оставшегося расстояния он ехал по грунтовой дороге, а далее — по лесной тропе.

Прочитайте первое предложение и ответьте на вопросы:

Что принято за 100%? Известна ли эта величина?

Какая величина приходится на 1%?
Сколько километров мотоциклист проехал по шоссе?

Прочитайте второе предложение и ответьте на вопросы:

Что принято за 100%? Известна ли эта величина?
Сколько всего километров проехал мотоциклист по грунтовой дороге и по лесной тропе?
Чему равен 1% этой величины?
Сколько километров мотоциклист проехал по грунтовой дороге?
Сколько километров мотоциклист проехал по лесной тропе?

У **282.** Мотоциклист проехал по шоссе 8 км, что составило 20% всего пути. 45% оставшегося пути он ехал по грунтовой дороге, а далее — по лесной тропе.

Ответьте на вопросы:

Что принято за 100% в первом предложении, а что — во втором? Известны ли эти величины?
Чему равен 1% всего пути? Какова длина всего пути?
Сколько всего километров проехал мотоциклист по грунтовой дороге и по лесной тропе?
Чему равен 1% этого расстояния?
Сколько километров проехал мотоциклист по грунтовой дороге?
Сколько километров проехал мотоциклист по лесной тропе?
Что общего в условиях предыдущих двух задач и чем они отличаются?

О **283.** Весной яблоки продавались по 35 р. за килограмм, а к осени их цена была снижена сначала на 20%, а затем еще на 15%. Какой стала цена яблок после второго снижения?

О **284.** Зимой цену на бананы повысили на 1,44 р., что составило 18% их осенней цены, а весной цену подняли еще на 25%. По какой цене бананы продавались весной?

Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли, что знак алгебраической суммы чисел всегда совпадает со знаком того из ее слагаемых, которое имеет больший модуль? Приведите примеры.
2. Найдите по правилу вычисления алгебраической суммы значение выражений: а) (–15) + 12; б) (–15) + (–12).

§ 9. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

285. Найдите значение выражения $-a + b$, если:
а) $a = 25$, $b = 32$; в) $a = -25$, $b = 32$;
б) $a = 25$, $b = -32$; г) $a = -25$, $b = -32$.

286. Найдите значение разности $a - b$, если:
а) $a = +17$, $b = 4$; в) $a = -17$, $b = -4$;
б) $a = -17$, $b = 4$; г) $a = 17$, $b = -4$.

287. Найдите значение выражения $-a - b$, если:
а) $a = 14$, $b = 12$; в) $a = 14$, $b = -12$;
б) $a = -14$, $b = 12$; г) $a = -14$, $b = -12$.

288. Вычислите:
а) $(-18 - 21) + (-15 + 4)$; в) $(0{,}8 - 1{,}4) + (1{,}2 - 1{,}6)$;
б) $(-25 + 15) - (-13 - 12)$; г) $(-2{,}1 + 5{,}3) - (4{,}7 - 6{,}8)$.

Известно, что a и b — положительные числа. Сравните:

289. а) 0 и a; б) $-a$ и b; в) $|a|$ и $-a$; г) $-b$ и $|a|$.

290. а) 0 и $-b$; б) a и $-b$; в) $|-b|$ и b; г) $|b|$ и $|-a|$.

291. Сколько целых чисел заключено между числами:
а) 0 и 18; б) −15 и 0; в) −20 и −8; г) −6 и 6?

292. Используя знак модуля, запишите:
а) модуль суммы чисел a и b;
б) сумму модулей чисел a и b;
в) модуль разности чисел a и b;
г) разность модулей чисел a и b.

293. Сравните значения выражений
$a + b$ и $a + |b|$; $a - b$ и $a - |b|$; $|a + b|$ и $|a| + |b|$;
$|a - b|$ и $|a| - |b|$
при $a = 8$, $b = 6$; $a = -8$, $b = -6$; $a = -8$, $b = 6$; $a = 8$, $b = -6$.
Проанализируйте полученные результаты и определите, какие из следующих утверждений верны:
а) при замене слагаемого его модулем сумма увеличивается;
б) при замене вычитаемого его модулем разность не увеличивается;

в) модуль суммы чисел меньше суммы модулей слагаемых;
г) модуль разности чисел больше или равен разности их модулей.
Неверные утверждения исправьте.

У **294.** Сравните значения выражений $|a - b|$ и $|b - a|$ при
$a = 8,\ b = 6;\quad a = -8,\ b = -6;\quad a = -8,\ b = 6;\quad a = 8,\ b = -6.$
Какое предположение можно сделать? Возьмите какие-нибудь другие значения a и b и проверьте, верно ли для них ваше предположение.

Проверьте себя.

Значения выражений $|a - b|$ и $|b - a|$ равны при любых значениях a и b.

У **295.** 1) Найдите расстояние между точками координатной прямой:
$A(2)$ и $B(7)$; $A(-2)$ и $B(7)$; $A(20)$ и $B(70)$; $A(-20)$ и $B(70)$.

2) Найдите значение выражения $|a - b|$ при $a = 2$, $b = 7$ и сравните его с расстоянием между точками $A(2)$ и $B(7)$.

3) Используя результаты проделанной работы, определите без вычислений, каким будет значение выражения $|a - b|$ при
$a = 20,\ b = 70;\quad a = -2,\ b = 7;\quad a = -20,\ b = 70.$
Проверьте себя, выполнив вычисления.

4) Задайте любые другие значения a и b и найдите соответствующие значения $|a - b|$. Сравните их с расстоянием между точками $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой. Какое предположение можно сделать?

Проверьте себя.

Расстояние между точками a и b равно модулю разности координат этих точек: $|a - b|$.

Обычно вместо $A(a)$ и $B(b)$ пишут просто a и b, а расстояние между точками a и b обозначают $\rho(a, b)$ (ρ — ро, буква греческого алфавита). Запись $\rho(a, b)$ читается: «ро от a, b». Таким образом, $\rho(a, b) = |a - b|$.

296. Найдите $\rho(x, y)$, если:
а) $x = -1{,}8,\ y = 1{,}5$; в) $x = 0{,}5,\ y = 7{,}4$;
б) $x = -14,\ y = -23$; г) $x = 5{,}9,\ y = -6{,}8$.

О **297.** На координатной прямой отмечены точки $A(x)$ и $B(y)$. Точка C — середина отрезка AB. Найдите координату точки C, если:
а) $x = 2,\ y = 8$; в) $x = -2,\ y = -8$;
б) $x = -2,\ y = 8$; г) $x = 2,\ y = -8$.

298. Найдите координаты точек, удаленных от точки:

а) $B\left(-\frac{2}{3}\right)$ на $\frac{1}{3}$; в) $A\left(\frac{1}{6}\right)$ на $3\frac{5}{6}$; д) $M\left(\frac{4}{7}\right)$ на $1\frac{3}{7}$;

б) $D(2,3)$ на 4,5; г) $C\left(-2\frac{3}{5}\right)$ на $\frac{2}{5}$; е) $N\left(-1\frac{7}{8}\right)$ на $2\frac{5}{8}$.

299. Для каких значений x верно неравенство:
а) $x > -x$; б) $-x > x$; в) $-x > x + x$; г) $x - x > -x$?

300. Вычислите:
а) $-25,5 - 3,4 + 7,28 + 25,5 + 34 : 10 - 0,728 \cdot 10 + 2,85$;
б) $5,88 + 0,963 - 0,0588 \cdot 100 - 56,4 - 96,3 : 100 - 43,6$;
в) $7,41 : 10 - 6,92 + 7,46 - 0,741 + 0,692 \cdot 10 - 14,92$;
г) $-82,6 - 34,24 + 6,59 + 0,826 \cdot 100 - 659 : 100 + 17,12$.

301. Вычислите:
а) $0,78 \cdot 17 + 1,7 \cdot 26,1 - 2,5 \cdot 0,42 - 314 \cdot 0,17 - 0,25 \cdot 8,8$;
б) $15,32 \cdot 0,5 - 79,6 \cdot 0,05 - 31,8 \cdot 1,723 - 0,398 \cdot 5 + 167,3 \cdot 0,318$.

302. Экипаж рыболовного судна за путину выловил 9571 ц рыбы. Это превысило план на 12,6%. Экипаж другого судна, имеющий аналогичное задание, выловил рыбы на 5,8% меньше запланированного. Сколько центнеров рыбы выловил второй экипаж?

303. Ржаная мука дает 40% припека, а пшеничная — 35%. Сколько потребуется муки, чтобы испечь 1 т ржаного хлеба и 1 т пшеничного хлеба? (Ответ дайте с точностью до 1 кг.)

304. Бригада рыбаков получила от двух банков ссуду на приобретение холодильного оборудования в размере 250 000 р.: от одного под 5%, а от другого под 7% годовых. Всего за год рыбаки должны уплатить 15 500 р. процентных денег. Сколько денег взято у каждого банка?

305. Из данных букв латинского алфавита выберите буквы, имеющие центр симметрии:

A N H I T

Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли, что если координаты точек имеют разные знаки, то расстояние между этими точками равно сумме модулей их координат?
2. Найдите по формуле расстояния между точками длину отрезка AB:
а) $A(3)$, $B(-8)$; б) $A(-24)$, $B(-16)$.

§ 10. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

306. Рассмотрите фигуры на рисунке 47.

Рис. 47

1) Подумайте, по какому признаку они собраны по группам в каждом столбике.

2) Распределите по этим группам фигуры, изображенные на рисунке 48.

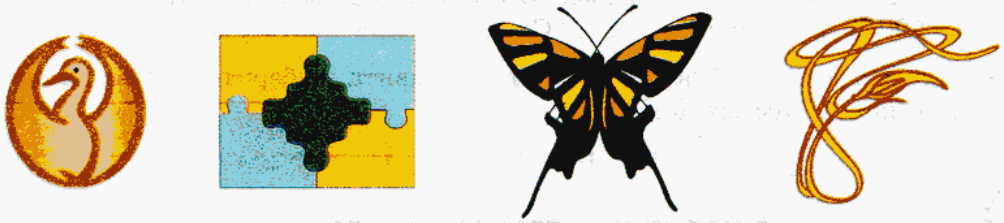


Рис. 48

Проверьте себя.

Наверняка вы догадались, что в первую группу собраны центрально-симметричные фигуры. Среди тех фигур, которые надо рас-

пределить по группам, такая только одна — это вторая фигура (мозаика). Также нетрудно догадаться, что вензель следует отнести к фигурам второй группы, хотя пока мы это можем утверждать, основываясь только на интуиции. Остались птичка и бабочка. Можно ли их «отправить» в третью группу?

Фигуры третьей группы характеризуются тем, что каждая из них состоит как бы из двух половинок, одна из которых является зеркальным отражением другой. Каждую из этих фигур можно согнуть пополам так, что эти половинки совпадут (рис. 49).

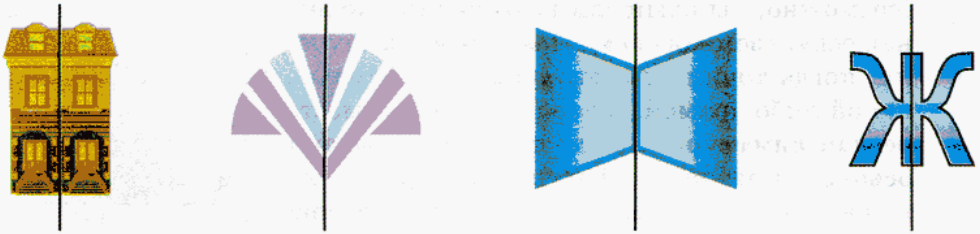


Рис. 49

Таким свойством обладает только бабочка, поэтому ее мы присоединяем к третьей группе. А птичке придется «отправиться» во вторую группу.

307. Приведите свои примеры таких фигур, которые можно присоединить к третьей группе.

308. Рассмотрите рисунок 50.

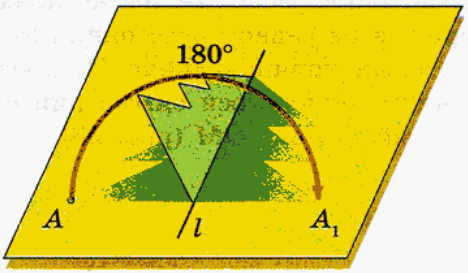


Рис. 50

На листе бумаги изображена «елочка». Концы ее нижних «веток» обозначены буквами A и A_1. Если перегнуть «елочку» по прямой l, то точки A и A_1 совпадут. Постарайтесь описать, как расположены точки A и A_1 по отношению к прямой l.

Проверьте себя.

Чтобы понять, как располагаются точки A и A_1, представим, что мы смотрим на рисунок сверху.

Теперь видно, что точки A и A_1 расположены на перпендикуляре к прямой l по разные стороны и на равных расстояниях от нее (рис. 51). Такие точки называют **симметричными относительно прямой l.**

Заметим, что, перегибая фигуру так, чтобы точки A и A_1 совпали, мы поворачивали ее половину вокруг прямой l на 180°. Прямую, вокруг которой что-либо поворачивается (вращается), называют **осью** (возможно, вы слышали выражения «колесная ось», «земная ось»). Поэтому в тех случаях, когда точки симметричны относительно какой-либо прямой, говорят, что имеет место **осевая симметрия**, саму прямую называют **осью симметрии**, а о фигурах, которые можно перегнуть так, чтобы их половинки совпали, говорят, что они **имеют ось симметрии** или что они **симметричны относительно некоторой оси.**

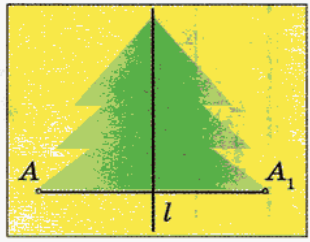


Рис. 51

У **309.** Проведите прямую a и отметьте точку M вне этой прямой так, как показано на рисунке 52. Постройте точку, симметричную данной относительно прямой a.

Проверьте себя.

Симметричные точки расположены на прямой, перпендикулярной оси симметрии, и на равном расстоянии от нее. Поэтому, чтобы построить точку, симметричную точке M, проведем через нее прямую MO, перпендикулярную оси симметрии a, и отложим на ней отрезок OM_1, равный отрезку OM (рис. 53).

Рис. 52

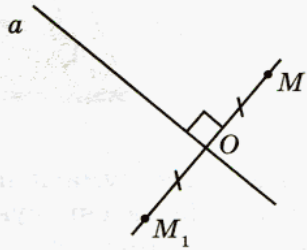


Рис. 53

310. Скопируйте в тетрадь рисунок 54 и постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой l.

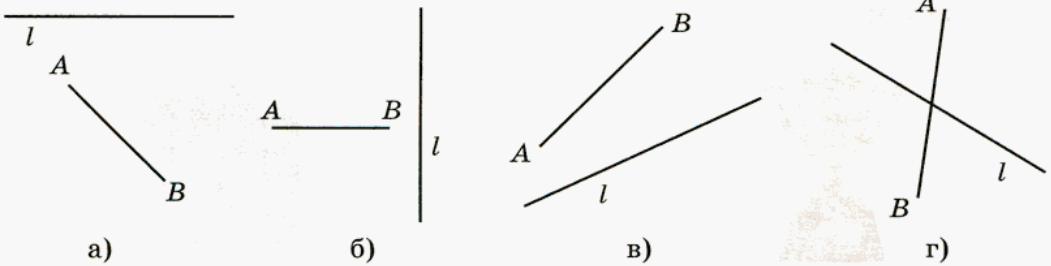


Рис. 54

311. Скопируйте в тетрадь рисунок 55 и постройте фигуру, симметричную данной относительно прямой l.

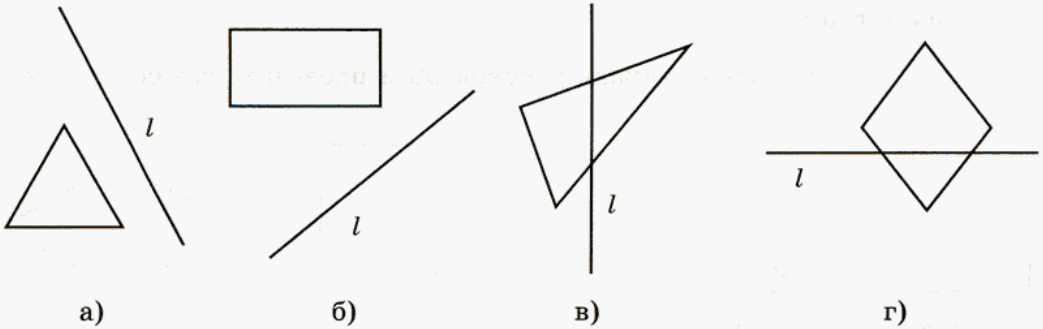


Рис. 55

312. Из данных на рисунке 56 фигур выберите те, которые имеют ось симметрии.

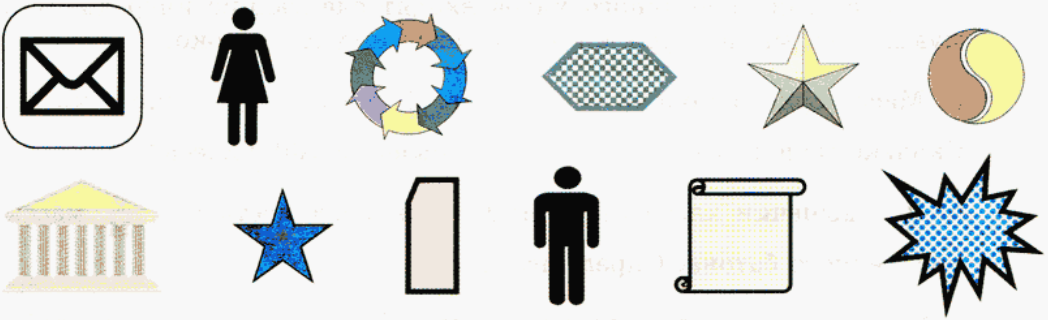


Рис. 56

Есть ли среди них такие, которые имеют более одной оси симметрии?

313. Ось симметрии имеют не только плоские фигуры. На рисунке 57 изображены некоторые пространственные фигуры, имеющие ось симметрии.

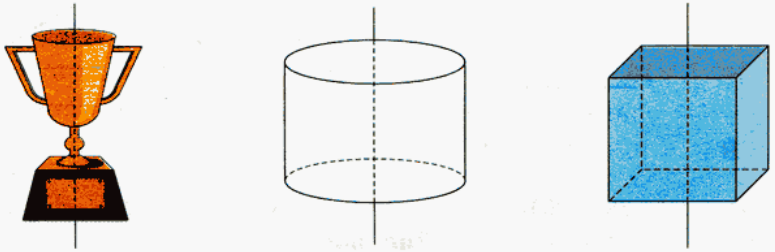
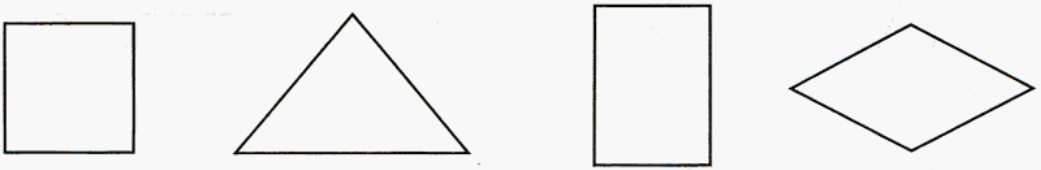


Рис. 57

Приведите примеры других пространственных фигур, имеющих ось симметрии.

314. Скопируйте в тетрадь рисунок 58 и проведите все оси симметрии фигуры.



а) квадрат б) равнобедренный треугольник в) прямоугольник г) ромб

Рис. 58

315. В состав пшеничного хлеба входят следующие ингредиенты: мука, вода, масло, дрожжи, соль, сахар и сухое молоко.

а) Масса сухого молока составляет $\frac{3}{70}$ массы испеченного хлеба. Сколько молока требуется для изготовления 700 г хлеба?

б) Для выпечки хлеба взяли 450 г муки, что составило $\frac{9}{14}$ массы полученного батона. Определите массу батона.

в) Масса растительного масла составляет $\frac{11}{35}$ массы испеченного хлеба. Сколько масла требуется для приготовления 1050 г хлеба?

316. Догадайтесь, какое число является корнем уравнения, и выполните проверку:

а) $x + (-3) = 10$; в) $19 + a = -3$; д) $t - (-2) = -8$;
б) $-8 - y = -14$; г) $-15 + b = -5$; е) $(+2) + p = -12$.

317. Представьте число −20 в виде суммы двух отрицательных чисел так, чтобы слагаемые были: а) целыми числами; б) десятичными дробями; в) смешанными числами.

318. Представьте число −10 в виде суммы двух чисел с разными знаками так, чтобы слагаемые были:

а) целыми числами; б) десятичными дробями.

319. Найдите x из равенства:

а) $-x = 4{,}5 - (-2)$;

б) $-x = -8{,}2 + 10$;

в) $-x = -\frac{8}{43} + \left(-\frac{15}{43}\right)$;

г) $-x = -\frac{7}{15} - \left(-\frac{2}{15}\right)$;

д) $-x = \frac{7}{15} - \left(+\frac{14}{15}\right)$;

е) $-x = -\frac{5}{12} - \left(+\frac{11}{12}\right)$.

Решите уравнение:

320. а) $x + 3 = -8$; в) $x - 1{,}8 = -3{,}7$; д) $8 - x = 1$;
б) $4 - x = -15$; г) $x + 1{,}2 = -0{,}17$; е) $-2{,}1 - x = 2$.

321. а) $x + (-5) = -6$; в) $7{,}1 - x = -3{,}8$; д) $x - (+9) = -3{,}1$;
б) $x - 8{,}5 = -3$; г) $x - 3{,}41 = -2{,}904$; е) $-1{,}9 - x = 4{,}4$.

Выполните действие:

322. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$; г) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{11}$.

323. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{7}$; б) $-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3} - \frac{1}{8}$; г) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$.

324. а) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$; б) $-\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$; в) $\frac{2}{3} - \frac{7}{8}$; г) $\frac{5}{7} - \frac{1}{3}$.

325. а) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$; б) $-\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; г) $-\frac{7}{9} + \frac{1}{4}$.

Найдите значение выражения:

326. а) $3 + \frac{1}{2} - 5 - \frac{1}{4}$; в) $5 + \frac{9}{11} - 7 - \frac{3}{22}$; д) $-3 + \frac{7}{18} - \frac{17}{18} + \frac{2}{9}$;

б) $4 - 10 + \frac{1}{5} - \frac{2}{10}$; г) $-\frac{7}{15} - \frac{2}{3} - 2 + 7$; е) $\frac{5}{27} - \frac{4}{9} - 3 + 1$.

327. а) $-\frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{6} - 3$; в) $-4 + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + 9$; д) $-15 + \frac{7}{20} - \frac{9}{30} + 3$;

б) $\frac{3}{8} - 2 - \frac{7}{16} + 8$; г) $-\frac{4}{5} - 8 + 13 + \frac{3}{10}$; е) $2 - \frac{1}{14} - \frac{1}{28} + 1$.

328. Найдите значение выражения:

а) $(x + y) - z$ при $x = -2{,}1$, $y = 3{,}7$, $z = -5$;
б) $x - (y + z)$ при $x = 4{,}5$, $y = 7{,}2$, $z = -10$;
в) $x + (y - z)$ при $x = 15$, $y = 2{,}7$, $z = -4$;
г) $-x - (y - z)$ при $x = -3$, $y = -18$, $z = -7$.

329. У Маши было x десятикопеечных и y пятикопеечных монет.

а) Что означают выражения: $10x$; $5y$; $10x + 5y$?
б) Что означает равенство $10x + 5y = 115$?

330. К осени цена на картофель понизилась сначала на 25%, а затем еще раз понизилась на 70%, после чего картофель стал стоить 6,3 р. за килограмм. Найдите летнюю цену картофеля.

331. Семейный бюджет составляет 22 000 р. в месяц. 5,5% этой суммы уходит на оплату коммунальных услуг и электроэнергии, а 5% остатка — транспортные расходы.
Какая сумма остается в семейном бюджете после оплаты коммунальных услуг и приобретения проездных месячных билетов?

Контрольные задания

1. Приведите примеры геометрических фигур, имеющих ось симметрии.
2. Проведите прямую a, отметьте точку N вне этой прямой и постройте точку, симметричную точке N относительно прямой a.

§ 11. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Часто, чтобы не загромождать рисунок, на изображении координатной прямой не указывают начало отсчета (точку O) и единичный отрезок. Но при этом обязательно оговаривают, что изображенная на рисунке прямая — координатная. Мы этим уже пользовались, когда изображали схематически перемещения точки по координатной прямой. Тогда нас не интересовала точная величина единичного отрезка. Для нас было важно только расположение точек относительно друг друга и относительно начала отсчета. Во всех примерах, которые будут рассмотрены ниже, речь идет о координатной прямой. На рисунках, иллюстрирующих эти примеры, координатная прямая изображена без указания начала отсчета и величины единичного отрезка.

Рассмотрите рисунок 59.

Рис. 59

На нем вы видите координатную прямую с отмеченной на ней точкой a. Все точки, расположенные правее, отмечены штриховкой — это числа бóльшие числа a. Такое множество точек (чисел) называют *открытым лучом* и обозначают $(a; +\infty)$. Эта символическая запись (т. е. запись с помощью математических символов) читается так: «a; плюс бесконечность». Или так: «от a до плюс бесконечности». Для любого числа x из этого множества верно неравенство $x > a$. На рисунке 60 штриховкой отмечены точки, расположенные слева от точки a.

Рис. 60

Это тоже открытый луч. Попробуйте догадаться, как обозначают такой открытый луч и какое неравенство будет верным для всех чисел, принадлежащих ему.

Проверьте себя.

Такой открытый луч обозначают $(-\infty; a)$, где знак $-\infty$ читается: «минус бесконечность». Для всех чисел этого открытого луча верно неравенство $x < a$.

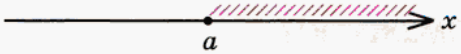


Рис. 61

Рис. 62

Рассмотрите рисунки 61 и 62. Сравните их с рисунками 59 и 60. В чем их сходство, в чем отличие? Зачем точку, соответствующую числу a, закрасили черным цветом?

Вы знаете, что так на рисунке изображается обычный *луч*. Он получается, если к открытому лучу присоединить его начало. Для обозначения луча при записи используют квадратную скобку: $[a; +\infty)$, $(-\infty; a]$. Для любого числа x из множества чисел, принадлежащих лучу $[a; +\infty)$, верно неравенство $x \geqslant a$, а для любого числа x из множества чисел, принадлежащих лучу $(-\infty; a]$, верно неравенство $x \leqslant a$. Такие неравенства называют *нестрогими* в отличие от неравенств вида $x > a$ и $x < a$, которые называют *строгими*.

332. Определите, где на рисунке 63 изображены лучи, а где — открытые лучи, и сделайте соответствующие записи.

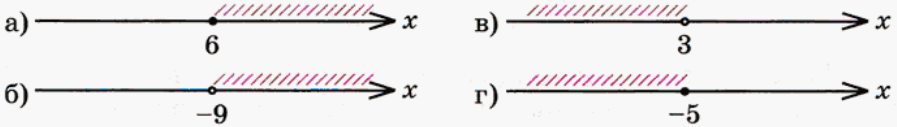


Рис. 63

Образец: а) луч $[6; +\infty)$, $x \geqslant 6$.

На рисунке 64 штриховкой отмечены точки (числа), расположенные между точками a и b. Такое множество точек (чисел) называют *интервалом* и обозначают $(a; b)$.

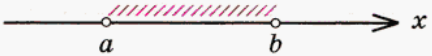


Рис. 64

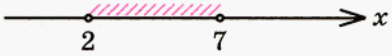
Рис. 65

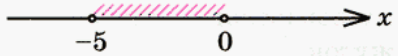
На рисунке 65 изображен тот же интервал, но на этот раз к нему присоединили его концы, точки a и b. Поэтому то, что изображено на этом рисунке, уже не интервал, а *отрезок*, который обозначают $[a; b]$.

Для всех точек x, принадлежащих интервалу $(a; b)$, верно строгое двойное неравенство $a < x < b$ (читается: «x больше a, но меньше b»), а для всех точек x, принадлежащих отрезку $[a; b]$, верно нестрогое двойное неравенство $a \leqslant x \leqslant b$ (читается: «x больше или равен a, но меньше или равен b»).

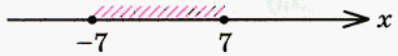
Еще раз обращаем ваше внимание на то, что символическая запись (a, b), в которой используются круглые скобки, соответствует строгому неравенству, а на рисунке — незакрашенным точкам a и b. А символическая запись $[a; b]$, в которой используются квадратные скобки, соответствует нестрогому неравенству, а на рисунке — закрашенным точкам a и b.

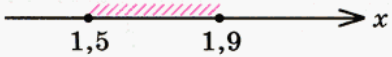
Определите, на каких рисунках изображены отрезки, а на каких — интервалы, и сделайте соответствующие записи (используя скобки и знаки неравенств):

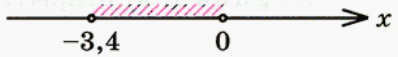
333. а) 

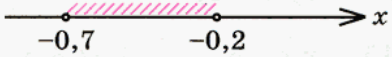
в) 

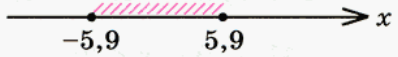
б)

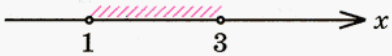
г) 

334. а) 

в) 

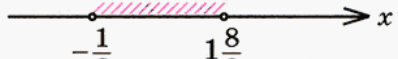
б) 

г) 

335. а) 

в)

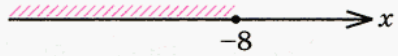
б)

г) 

Для терминов «луч», «открытый луч», «отрезок» и «интервал» есть общее название — *числовые промежутки*.

Запишите, какой числовой промежуток изображен на рисунке и какое неравенство будет верным для чисел, принадлежащих этому промежутку:

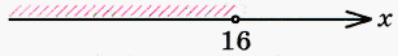
336. а)

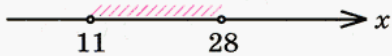
в) 

б)

г)

337. а)

в) 

б) 

г)

338. Даны числа: −2,5; −1,5; −0,8; −0,5; −0,2; 0; 9; 15; 17. Изобразите промежуток и запишите, какие из данных чисел принадлежат этому промежутку:

а) $[-0{,}8; +\infty)$; б) $(-\infty; 15]$; в) $(-\infty; -0{,}2)$; г) $(9; +\infty)$.

339. Даны числа: −64; −50; −20; −1,8; −0,75; 0,5; 15; 20; 28. Изобразите промежуток и запишите, какие из этих чисел ему принадлежат:

а) $[-0{,}75; 0{,}5]$; б) $(-1{,}8; 15)$; в) $(-64; -20)$; г) $[9; 28]$.

Определите вид числового промежутка, который соответствует данному неравенству, сделайте символическую запись и изобразите этот промежуток:

340. а) $x > 1$; б) $x \leqslant -7$; в) $x \geqslant -2$; г) $x < 5$.

Образец: а) открытый луч $(1; +\infty)$

341. а) $x > -8$; б) $x \leqslant 4$; в) $x \geqslant 9$; г) $x < -2$.

342. а) $0 < x < 2$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 8$; в) $-15 < x < -6$; г) $1 \leqslant x \leqslant 10$; д) $-7 \leqslant x \leqslant 3{,}9$; е) $-31 \leqslant x \leqslant -0{,}8$.

343. а) $-2 < x < 0$; б) $0 \leqslant x \leqslant 12$; в) $-10 < x < 10$; г) $1 \leqslant x \leqslant 100$; д) $0{,}2 < x < 0{,}9$; е) $-1500 < x < 2000$.

Укажите наименьшее целое число, принадлежащее данному числовому промежутку:

344. а) $[-2; +\infty)$; б) $(-3; +\infty)$; в) $(-5{,}1; +\infty)$; г) $[-8{,}7; +\infty)$; д) $[-128{,}9; 30]$; е) $(-325; -150)$.

345. а) $[-3{,}7; +\infty)$; б) $(2{,}4; +\infty)$; в) $(8; +\infty)$; г) $[-12; +\infty)$; д) $(7{,}8; 23)$; е) $[-4{,}9; -0{,}15]$.

Укажите наибольшее целое число, принадлежащее данному числовому промежутку:

346. а) $(-\infty; 3]$; б) $(-\infty; -3{,}5)$; в) $(-\infty; 4{,}7]$; г) $(-\infty; -18)$; д) $[-5{,}6; 5{,}6]$; е) $[-18; -3{,}9]$.

347. а) $(-\infty; 5{,}3]$; б) $(-\infty; -8{,}8)$; в) $(-\infty; -6{,}1]$; г) $(-\infty; 41)$; д) $(-64; -27)$; е) $(-3{,}5; 0)$.

Вы знаете, что на математическом языке могут быть описаны различные ситуации. При этом разным с обыденной точки зрения ситуациям могут соответствовать абсолютно одинаковые математические модели. Возможно и обратное — одна ситуация описывается разными моделями. Например, решая задачу, мы довольно часто рисуем схему по условию задачи, а затем составляем уравнение, обозначив искомую величину какой-либо буквой. И схема, и уравнение — это математические модели ситуации, описанной в задаче. Схема — это ее *графическая* (рисованная) *модель*, а уравнение — ее *аналитическая модель*.

Аналогично обстоит дело с числовыми промежутками. Числовой промежуток — это все числа, отвечающие определенным условиям. Например:

все числа меньшие 2;

все числа большие −5;

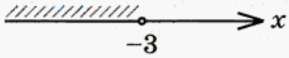
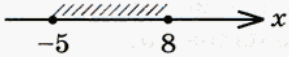
все числа большие −5 и одновременно с этим меньшие 2;

все числа большие или равные −5 и одновременно с этим меньшие или равные 2.

Для каждого из этих случаев можно построить как графическую, так и аналитическую модель и, кроме того, сделать символическую запись:

Условия	Название числового промежутка	Графическая модель	Аналитическая модель	Символическая запись
Все числа меньшие 2	Открытый луч	x 2	$x < 2$	$(-\infty; 2)$
Все числа большие или равные −5	Луч	x −5	$x \geqslant -5$	$[-5; +\infty)$
Все числа большие −5 и одновременно с этим меньшие 2	Интервал	x −5 2	$-5 < x < 2$	$(-5; 2)$
Все числа большие или равные −5 и одновременно с этим меньшие или равные 2	Отрезок	x −5 2	$-5 \leqslant x \leqslant 2$	$[-5; 2]$

348. Заполните пустые места в следующей таблице:

№	Условия	Название числового промежутка	Графическая модель	Аналитическая модель	Символическая запись
1	Все числа большие или равные −3				
2					
3				$x \geqslant 17$	
4					$(-\infty; 8]$
5					
6	Все числа большие −10 и одновременно меньшие −1				
7				$-2 \leqslant x \leqslant 3$	
8					(15; 25)

Графической моделью числового промежутка может быть одна из геометрических фигур:

- луч;
- открытый луч (луч, начало которого ему не принадлежит);
- отрезок;
- интервал (отрезок, концы которого ему не принадлежат).

Поэтому вместо словосочетания «графическая модель» чаще употребляют другое словосочетание — «геометрическая модель».

Постройте геометрическую модель числового промежутка и укажите все целые числа, которые ему принадлежат:

349. а) [−2; 1,8]; б) (−3,2; 8,5); в) [3,9; 15,2]; г) (−9; 12).

350. а) [−2,5; 14]; б) (−7; −3); в) [6,01; 10]; г) (12; 13).

351. а) [−1; 1]; б) (−1; 1); в) [−1; 0]; г) (0; 1).

352. а) $\left[-\frac{2}{3};\ 1\frac{2}{3}\right]$; б) $\left(-7\frac{2}{5};\ -3\frac{1}{3}\right)$; в) $\left[2\frac{3}{4};\ 3\right]$; г) $\left(-2;\ 3\frac{1}{7}\right)$.

Через начало отсчета O перпендикулярно координатной прямой проведена прямая l (рис. 66). На координатной прямой взят числовой промежуток. Найдите числовой промежуток, симметричный данному относительно оси l (№ 353—354).

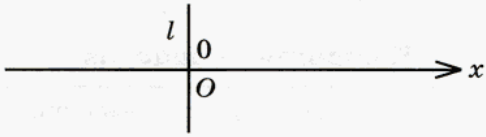


Рис. 66

353. а) [2; 5]; б) (−7; −3); в) [−1; 4]; г) (−2; 2).

354. а) (2; +∞); б) (−∞; −3]; в) [−3; +∞); г) (−∞; 2).

355. Верно ли, что в ситуации, представленной на рисунке 39, следующие числовые промежутки симметричны относительно оси l:

а) [2; 7] и [−7; −2]; в) (1; +∞) и (−∞; −1);
б) [12; 28] и (−28; −12); г) (2; 4) и (−4; −2)?

Укажите центр симметрии числового промежутка, если он существует:

356. а) [−20; 0]; б) (−∞; 4]; в) (−8; 8); г) (−12; +∞).

357. а) [−12; +∞); б) [0; 35]; в) (−14; −1); г) (−∞; −25).

358. а) [−17; 0]; б) [0; 19]; в) (−15; −4); г) (−7; 23).

359. а) (−1,2; 1); б) [0,7; 0,9]; в) (−1,8; 5,9); г) (−120; −52).

Вычислите:

360. а) (−5,48) − (−1,52) + 7,42 − 8,01 − 7,42 − (−5,48);
б) 9,49 − (−1,37) − 1,1 − 9,49 − (+2,31) − 0,27;
в) −(−7,29) − (−0,22) − 4,09 − 3,2 − 0,22 + (−1,85);
г) −(−4,07) + (−0,54) − 2,035 − (−2,81) − 0,45 + (−2,035).

361. а) −0,25 + (7,23 − 4,08); в) 0,61 − (0,08 − 1,97);
б) −7,84 − (−2,6 − 3,4); г) −5,19 + (−6,93 + 8,1).

362. Семья из трех человек тратит на питание около 5000 р. в месяц, что составляет примерно 40% семейного бюджета. 40% оставшихся денег откладывается на покупку мебели. Какая сумма остается на другие расходы?

363. Свежий гриб содержит 90% воды, а сушеный — 15%. Сколько получится сушеных грибов из 17 кг свежих? Сколько надо взять свежих грибов, чтобы получить 3,4 кг сушеных?

Контрольные задания

Определите вид числового промежутка, составьте его аналитическую и геометрическую модели:

а) $(-\infty; 3]$; б) $(-9; +\infty)$; в) $(3; 7)$; г) $[-28; 0]$.

§ 12. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

364. 1) Замените сумму произведением:

а) $15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15$;
б) $7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1 + 7{,}1$;
в) $1 + 1 + \ldots + 1$ (n слагаемых);
г) $(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$;
д) $(-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6)$;
е) $(-1) + (-1) + \ldots + (-1)$ (n слагаемых).

2) Представьте произведение в виде суммы:

а) $(-1) \cdot 3$; в) $(-1) \cdot 7$;
б) $(-1) \cdot 5$; г) $(-1) \cdot n$ (n — натуральное число).

3) Вычислите, используя результаты предыдущего задания:

а) $(-1) \cdot 3$; б) $(-1) \cdot 5$; в) $(-1) \cdot 7$.

В каждом случае сравните результат умножения со вторым множителем. Что вы заметили? Упростите выражение $(-1) \cdot n$ (n — натуральное число).

4) Каким, по вашему мнению, должно быть значение таких выражений:

а) $3 \cdot (-1)$; б) $5 \cdot (-1)$; в) $7 \cdot (-1)$?

Почему?

5) Упростите выражения: $1 \cdot a$; $a \cdot 1$; $(-1) \cdot a$; $a \cdot (-1)$.

Проверьте, так ли вы выполнили задания 3)—5).

3) а) $(-1)\cdot 3 = (-1)+(-1)+(-1) = -3$;
$\mathbf{(-1)\cdot 3 = -3}$;

б) $(-1)\cdot 5 = (-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -5$;
$\mathbf{(-1)\cdot 5 = -5}$;

в) $(-1)\cdot 7 = (-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -7$;
$\mathbf{(-1)\cdot 7 = -7}$.

Таким образом, *при умножении* (−1) *на натуральное число получаем число, ему противоположное:*

$$(-1)\cdot n = -n.$$

4) Для отрицательных чисел, как и для положительных, должен выполняться переместительный закон умножения, поэтому:

$$3\cdot(-1) = -3; \quad 5\cdot(-1) = -5; \quad 7\cdot(-1) = -7.$$

5) $1\cdot a = a\cdot 1 = a$;
если a — натуральное число, то $(-1)\cdot a = a\cdot(-1) = -a$.

У **365.** 1) Найдите значение выражения $1\cdot a$ при $a = 3;\ 5{,}8;\ \frac{3}{4}$.

Подумайте, каким оно будет при $a = -3;\ -5{,}8;\ -\frac{3}{4}$.

Что получается при умножении любого числа на 1?

2) Подумайте, каким будет значение выражения $(-1)\cdot a$ при $a = 5{,}2;\ \frac{7}{8};\ -3;\ -5{,}8;\ -\frac{3}{4}$.

Постарайтесь сделать вывод о том, что получается при умножении любого числа на (−1).

Проверьте свои рассуждения.

1) При умножении любого неотрицательного числа на 1 получается то же самое число. Очевидно, для отрицательных чисел это тоже должно быть верно. Поэтому

$$1\cdot(-3) = -3; \quad 1\cdot(-5{,}8) = -5{,}8; \quad 1\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

При умножении любого числа на 1 получается то же самое число:

$$1\cdot a = a\cdot 1 = a.$$

2) Мы убедились, что при умножении натурального числа на (–1) получается число, ему противоположное, т. е. при натуральных значениях a равенство $(-1) \cdot a = -a$ справедливо. Естественно считать, что это верно для любых других значений a. Значит:

$(-1) \cdot 5{,}2 = -5{,}2$; $(-1) \cdot (-3) = -(-3) = 3$;

$(-1) \cdot \frac{7}{8} = -\frac{7}{8}$; $(-1) \cdot (-5{,}8) = -(-5{,}8) = 5{,}8$;

$(-1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

При умножении любого числа на (–1) получается число, ему противоположное:

$$(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a.$$

366. Вычислите: $(-1) \cdot 5$; $(-1) \cdot (-9{,}1)$; $85 \cdot (-1)$; $(-7{,}6) \cdot (-1)$; $(-1) \cdot 0$.

У **367.** Подумайте, как найти значение следующих выражений:

а) $(-3) \cdot 1{,}5$; б) $17 \cdot (-0{,}4)$.

Подсказка.

Отрицательный множитель можно заменить произведением (–1) на соответствующее положительное число, а затем применить сочетательный закон умножения.

Проверьте себя.

$(-3) \cdot 1{,}5 = ((-1) \cdot 3) \cdot 1{,}5 = (-1) \cdot (3 \cdot 1{,}5) = (-1) \cdot 4{,}5 = -4{,}5$.

Значит,

$$\mathbf{(-3) \cdot 1{,}5 = -4{,}5.}$$

Рассуждая аналогично, получаем: $\mathbf{17 \cdot (-0{,}4) = -6{,}8}$.

Сравните равенства, выделенные жирным шрифтом. Какую закономерность вы увидели?

Проанализируйте полученные результаты и постарайтесь сформулировать правило умножения чисел с разными знаками.

368. Вычислите: а) $8 \cdot (-4)$; б) $(-2) \cdot 6$; в) $3 \cdot (-5)$; г) $(-7) \cdot 4$.

Проверьте, такое ли правило у вас получилось:

при умножении двух чисел с разными знаками в результате получается отрицательное число, модуль которого равен произведению модулей множителей.

$(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (+) = (-)$

369. Подумайте, чему равно произведение чисел с одинаковыми знаками:

а) $(-3) \cdot (-1{,}5)$; б) $(-17) \cdot (-0{,}4)$.

Подсказка.

Попробуйте заменить отрицательное число произведением противоположного числа и (-1).

Проверьте себя.

$(-3) \cdot (-1{,}5) = ((-1) \cdot 3) \cdot (-1{,}5) = (-1) \cdot (3 \cdot (-1{,}5)) = -(-4{,}5) = 4{,}5$.

Таким образом, $\mathbf{(-3) \cdot (-1{,}5) = 4{,}5}$.

Самостоятельно докажите, что $\mathbf{(-17) \cdot (-0{,}4) = 6{,}8}$.

Сравните равенства, выделенные жирным шрифтом. Какую закономерность вы увидели?

370. Вычислите:

а) $(-6) \cdot (-3)$; в) $-5 \cdot (-0{,}7)$;
б) $(-0{,}8) \cdot (-9)$; г) $-2 \cdot (-1{,}6)$.

371. Рассмотрите равенства

$(-3) \cdot (-1{,}5) = 4{,}5$; $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$;
$(-17) \cdot (-0{,}4) = 6{,}8$; $17 \cdot 0{,}4 = 6{,}8$

и постарайтесь сформулировать правило умножения чисел с одинаковыми знаками.

Проверьте себя:

при умножении двух чисел с одинаковыми знаками получается положительное число, модуль которого равен произведению модулей множителей.

$(-) \cdot (-) = (+)$

$(+) \cdot (+) = (+)$

372. Вычислите:

а) $(-15) \cdot 6$; г) $(-8) \cdot (-21)$; ж) $-84 \cdot 5$;
б) $7{,}8 \cdot (-4)$; д) $-25 \cdot 44$; з) $0{,}6 \cdot (-0{,}5)$;
в) $(-2{,}7) \cdot (-0{,}3)$; е) $-1{,}25 \cdot (-72)$; и) $-7{,}1 \cdot (-1)$.

373. Вычислите:

а) $-5 \cdot \frac{3}{7}$; г) $(-12) \cdot \left(-\frac{2}{25}\right)$; ж) $-\frac{2}{21} \cdot (-4)$;

б) $5 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$; д) $-7 \cdot \left(-\frac{4}{21}\right)$; з) $(-8) \cdot \left(-\frac{7}{16}\right)$;

в) $\frac{4}{15} \cdot (-3)$; е) $-\frac{3}{17} \cdot 6$; и) $\frac{3}{4} \cdot (-12)$.

У **374.** 1) Угадайте корень уравнения и сделайте проверку:

а) $5 \cdot x = 20$; в) $(-4) \cdot x = -36$;

б) $(-6) \cdot x = 42$; г) $8 \cdot x = -48$.

2) Запишите решение каждого уравнения и ответ.

3) Проанализируйте полученные результаты и постарайтесь сформулировать правило деления чисел с одинаковыми и с разными знаками.

Проверьте себя.

а) $5 \cdot x = 20$,	$5 \cdot 4 = 20$,	$x = 20 : 5$,	$x = 4$;
б) $(-6) \cdot x = 42$,	$(-6) \cdot (-7) = 42$,	$x = 42 : (-6)$,	$x = -7$;
в) $(-4) \cdot x = -36$,	$(-4) \cdot 9 = -36$,	$x = -36 : (-4)$,	$x = 9$;
г) $8 \cdot x = -48$,	$8 \cdot (-6) = -48$,	$x = -48 : 8$,	$x = -6$.

Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а знак частного определяется по такому же правилу, как знак произведения.

Вычислите:

375. а) $(-18) : (-3)$; в) $(-7{,}015) : (-2{,}3)$; д) $-0{,}035 : 7$;

б) $(-3{,}6) : 12$; г) $\left(-\frac{8}{15}\right) : 4$; е) $\frac{9}{11} : (-5)$.

376. а) $25 : (-5)$; в) $3{,}819 : (-3{,}8)$; д) $(-0{,}24) : (-1{,}6)$;

б) $4{,}8 : (-0{,}8)$; г) $\left(-\frac{3}{5}\right) : (-2)$; е) $-4{,}32 : (-54)$.

Запишите ответ в виде дроби или смешанного числа:

377. а) $(-4) : 7$; б) $9 : (-11)$; в) $16 : (-24)$; г) $(-8) : 7$.

378. а) $(-5) : (-6)$; б) $(-6) : (-14)$; в) $(-15) : (-35)$; г) $(-4) : (-3)$.

379. Запишите в виде смешанного числа:

$$-\frac{3}{2};\ \frac{-3}{2};\ \frac{3}{-2};\ \frac{-3}{-2};\ \frac{18}{15};\ -\frac{22}{5};\ \frac{14}{3};\ -\frac{26}{7}.$$

Вычислите:

380. а) $\frac{2}{9}\cdot(-5)$; б) $\left(-\frac{12}{25}\right):(-6)$; в) $-\frac{3}{4}\cdot 2$; г) $-\frac{7}{15}:(-3)$.

381. а) $(-8)\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{7}\right):2$; в) $-4\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$; г) $-\frac{3}{4}:(-2)$.

382. Представьте в виде неправильной дроби:

а) $2\frac{3}{5}$; б) $5\frac{2}{3}$; в) $-\left(1\frac{4}{7}\right)$; г) $-1\frac{4}{7}$; д) $-4\frac{3}{5}$; е) $-3\frac{4}{9}$.

Подумайте, как найти произведение или частное смешанного и целого чисел.

Вычислите:

383. а) $2\cdot 1\frac{3}{4}$; б) $1\frac{2}{7}\cdot(-14)$; в) $-7\frac{2}{7}:(-3)$; г) $-3\frac{2}{5}:5$.

384. а) $-10\cdot 2\frac{3}{5}$; б) $-3\frac{3}{11}\cdot(-4)$; в) $4\frac{1}{2}:(-9)$; г) $2\frac{5}{11}:3$.

Проверьте, так ли вы рассуждали:

$$2\cdot 1\frac{3}{4}=2\cdot\frac{7}{4}=\frac{2\cdot 7}{4}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2};$$

$$-7\frac{2}{7}:(-3)=\left(-\frac{51}{7}\right):(-3)=\frac{51}{7\cdot 3}=\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}.$$

Остальные задания выполняются аналогично.

385. Найдите значение выражения:

а) $5\cdot(-8)+(-4)\cdot(-2)-(-7)\cdot 3$;
б) $(-24+78+12-46)\cdot(-13)$;
в) $(-3{,}6+1{,}8)\cdot(8{,}5+(-2{,}1)\cdot 4)$;
г) $((-15)\cdot(-3)+55)\cdot(-8{,}501)$;
д) $(-16):(-4)+(-51):3$;
е) $(-1{,}8+3{,}4-2{,}2):50$;
ж) $((-7)\cdot 3{,}5+20)\cdot(-0{,}6)$;
з) $(71-3{,}8\cdot(-1{,}5)):(-1{,}3)$.

Выполните действия:

386. а) $5{,}2 \cdot (-8{,}05) + (-4{,}8) \cdot (-2{,}5) - (-7{,}9) \cdot 0{,}3$;
б) $(5{,}4 + (-0{,}35) \cdot 7{,}6) \cdot (-0{,}72 - 1{,}28)$;
в) $(-1{,}05 - 2{,}9 \cdot (-0{,}01)) \cdot (5{,}42 - 10{,}9)$;
г) $-5{,}784 \cdot (95{,}58 - 17{,}6 + 54{,}42 - 182{,}4)$.

387. а) $7{,}5 : (-25) + 0{,}18 : (-60)$;
б) $0{,}64 : 0{,}08 - (-54) : 0{,}9$;
в) $(-81) : (-2{,}7) - (-0{,}45) : (-0{,}9)$;
г) $0{,}1 : 0{,}002 - (7{,}91 : 0{,}565 - 11{,}1 : 1{,}48)$.

388. Проверьте справедливость распределительного закона умножения, заполнив пустые клетки таблицы (в последних трех строках задайте сами какие-нибудь значения a, b и c).

a	b	c	$a \cdot (b + c)$	$ab + ac$
–5	13	17		
–5	13	–17	(–5) · (–4) = 20	(–5) · 13 + (–5) · (–17) = –65 + 85 = 20
–0,25	–4	0,6		
–0,25	–4	–0,6		

389. Запишите без скобок:
а) $(-a) \cdot 3$; в) $(-5) \cdot x$; д) $(-1) \cdot (-c)$; ж) $-8 \cdot (-m)$;
б) $4 \cdot (-b)$; г) $-(-8) \cdot y$; е) $(-d) \cdot (-6)$; з) $-n \cdot (-7)$.

У **390.** 1) Представьте в виде произведения:
$-a - a - a - a - a$; $-2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b$.
2) Упростите выражения:
$(-3) \cdot 2x$; $-3 \cdot 2x$; $3 \cdot (-2x)$; $(-3) \cdot (-2x)$;
$-3 \cdot (-2x)$; $2x \cdot (-3)$; $-2x \cdot 3$; $-2x \cdot (-3)$.

Проверьте себя.
1) $-a - a - a - a - a = (-a) + (-a) + (-a) + (-a) + (-a) = (-a) \cdot 5 = -5a$;
$-2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b - 2b = (-2b) \cdot 8 = -16b$.
2) $(-3) \cdot 2x = ((-3) \cdot 2) \cdot x = -6x$ и т. д.

Упростите выражение:

391. а) $(-3) \cdot 6a$; б) $(-7x) \cdot (-5)$; в) $-8m \cdot 3$; г) $-6 \cdot (-2d)$.

392. а) $4b \cdot (-8)$; б) $-6 \cdot 4y$; в) $(-4) \cdot (-3n)$; г) $-7c \cdot (-3)$.

393. а) $6a : 2$; б) $-6a : 2$; в) $14x : 7$; г) $14x : (-7)$.

394. а) $6a : (-2)$; б) $(-6a) : (-2)$; в) $-14x : 7$; г) $-14x : (-7)$.

395. Дана аналитическая модель луча. Постройте его геометрическую модель и составьте соответствующую символическую запись:

а) $x \geqslant 0$; б) $x \leqslant 7$; в) $x \geqslant -1{,}5$; г) $x \leqslant -0{,}7$.

396. Для данного интервала постройте соответствующую геометрическую модель и составьте аналитическую модель:

а) $(-3; 5)$; б) $(-7; -5)$; в) $(-5; -1)$; г) $(0; 3{,}5)$.

397. Опыт состоит в том, что из данного промежутка наугад выбирают число x. Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное.

а) Дан интервал $(-3; 1)$. Событие состоит в следующем:
x — целое число;
x — натуральное число;
x удовлетворяет двойному неравенству $-3 < x < 1$;
x удовлетворяет неравенству $x > 0{,}99$.

б) Дан отрезок $[0{,}1; 0{,}18]$. Событие состоит в следующем:
x — целое число;
x — натуральное число;
x удовлетворяет двойному неравенству $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}18$;
x удовлетворяет равенству $x = 0{,}12$.

в) Дан луч $[0; +\infty)$. Событие состоит в следующем:
x — положительное число;
x — отрицательное число;
x удовлетворяет неравенству $x \leqslant 0$;
x удовлетворяет неравенству $x \geqslant 0{,}12$.

г) Дан открытый луч $(-\infty; -5)$. Событие состоит в следующем:
x — положительное число;
x — отрицательное число;
x удовлетворяет двойному неравенству $-10 \leqslant x \leqslant -5$;
x удовлетворяет неравенству $x \leqslant -10$.

Вычислите

398. а) $2\frac{3}{4} \cdot (-8)$; б) $4\frac{1}{3} : (-13)$; в) $-1\frac{7}{9} \cdot (-3)$; г) $-3\frac{2}{7} : (-2)$.

399. а) $-7\frac{1}{8} : (-3)$; б) $2\frac{3}{8} \cdot (-16)$; в) $-3\frac{2}{15} \cdot 5$; г) $-2\frac{2}{17} : (-6)$.

400. а) $-5\frac{2}{3} : 34$; б) $-3\frac{1}{4} \cdot (-12)$; в) $4\frac{4}{5} : (-8)$; г) $-1\frac{5}{18} : (-2)$.

401. У Маши было 16 десятикопеечных и пятикопеечных монет. Десятикопеечных монет было x штук.

1) Что означают выражения:

а) $16 - x$; б) $10x$; в) $5 \cdot (16 - x)$; г) $10x + 5(16 - x)$?

2) Какая ситуация описывается математической моделью

$$10x + 5(16 - x) = 115?$$

Контрольные вопросы и задания

1. Каким будет знак результата, если перемножить два положительных и три отрицательных числа? Изменится ли результат, если у каждого сомножителя поменять знак на противоположный?
2. Вычислите:

а) $-12{,}5 \cdot (-4)$; б) $1\frac{1}{2} : (-3)$.

§ 13. КООРДИНАТЫ

На рисунке вы видите три билета: в цирк, на поезд и в театр. На каждом из них дано описание того, где находится место владельца данного билета: на билетах в цирк и в театр это номер ряда и номер места в этом ряду, а на билете на поезд — номер вагона и номер места в этом вагоне.

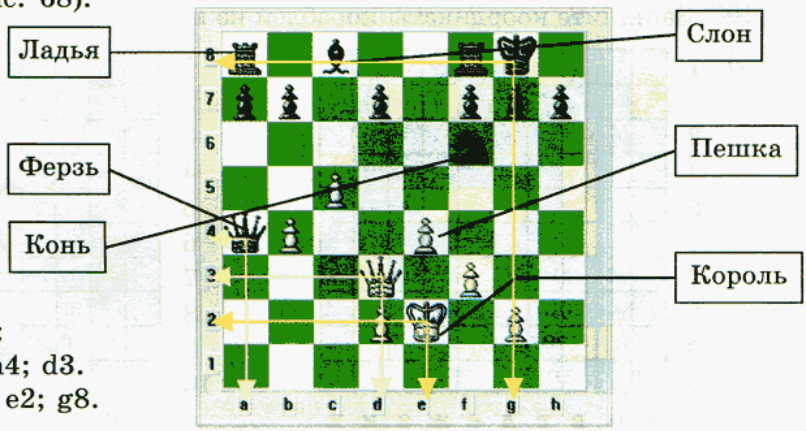
Описание того, где расположен тот или иной объект (предмет, место), называют его **координатами**. Так, на билете в цирк номер ряда и номер места в ряду — координаты этого места (рис. 67). Вы уже знакомы с координатной прямой и умеете выполнять две операции: отмечать на координатной прямой точку с заданной координатой и, наоборот, определять координату заданной точки. В жизни с похожей ситуацией мы сталкиваемся при движении по трассе, вдоль которой стоят столбы с километровыми отметками.

Рис. 67

Если же движение происходит не по трассе, а, например, по морю, где нет никаких столбов, или по воздуху, или даже в космосе, то с определением места нахождения объекта дело обстоит сложнее.

Уже в древности для определения своего местонахождения люди начали пользоваться такими координатами, как широта и долгота, с которыми вы познакомитесь или, возможно, уже познакомились на уроках географии.

402. Запишите координаты фигур, расположенных на шахматной доске (рис. 68).



Образец:
1) Ферзь: a4; d3.
2) Король: e2; g8.
И т. д.

Рис. 68, а

б)

г)

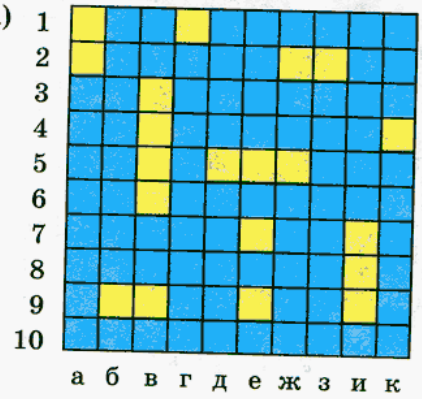
в)

д)

Рис. 68, б, в, г, д

403. Запишите координаты кораблей из игры «Морской бой» (рис. 69).

а)



б)

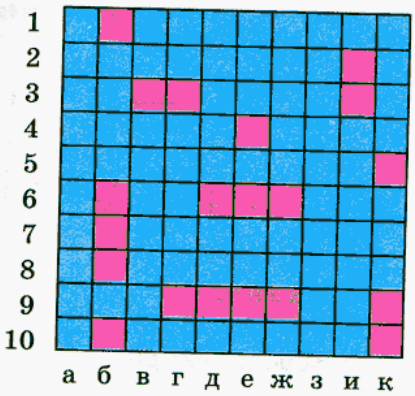


Рис. 69, а, б

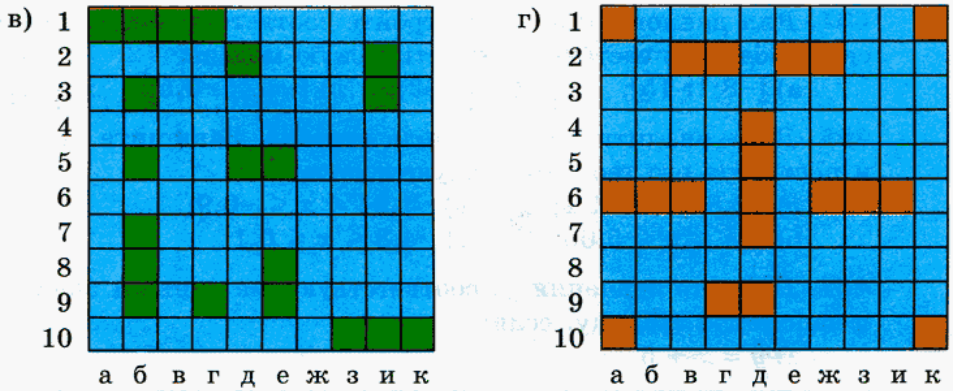


Рис. 69, в, г

Образец (к заданию а):

1) 4-клеточный: в3, в4, в5, в6.

404. Выполните действия:

а) $(5{,}4 - 3{,}65) \cdot (7{,}09 - 10{,}28)$;
б) $-4{,}96 : 10 - 35{,}8 : 100 - 0{,}0042$;
в) $120{,}03 : 15 - 72{,}492 : 12 - 78{,}156 : 36$;
г) $2{,}472 : 2{,}4 - 17{,}102 : 3{,}4 - 20{,}503 : 2{,}9$;
д) $(4{,}4 - 2{,}56) \cdot (6{,}08 - 9{,}72)$;
е) $-3{,}78 : 10 + 45{,}2 : 100 - 0{,}074$;
ж) $120{,}3 : (-15) + 1204{,}8 : 24 + 43 \cdot (-0{,}1)$;
з) $0{,}1 : 0{,}005 - (45{,}5 \cdot 0{,}08 - 92 : 4{,}6)$.

405. Дана аналитическая модель интервала. Запишите этот интервал и постройте его геометрическую модель:

а) $-3{,}5 < x < 0$;
б) $1{,}7 < x < 5{,}4$;
в) $-9{,}8 < x < -1{,}7$;
г) $-22 < x < 54$.

406. На рисунке 70 представлена геометрическая модель отрезка. Составьте его аналитическую модель и сделайте соответствующую символическую запись:

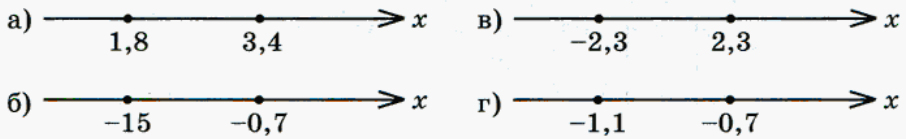


Рис. 70

407. Для данного отрезка постройте соответствующую геометрическую модель и составьте аналитическую модель:

а) [−8,1; 15]; б) [2,8; 5,02]; в) [−4,4; −0,5]; г) [−7,1; 2,8].

408. Дана аналитическая модель отрезка. Запишите этот отрезок и постройте его геометрическую модель:

а) $-2{,}8 \leqslant x \leqslant 1{,}2$; в) $-1{,}01 \leqslant x \leqslant -0{,}9$;

б) $3{,}4 \leqslant x \leqslant 5{,}06$; г) $-4{,}8 \leqslant x \leqslant 0{,}1$.

409. Найдите значения y, соответствующие данным значениям x, и заполните таблицу, если:

а) $y = x + 5$

x	0	1	−1	5	−5	7	−7
y							

б) $y = 6 - x$

x	−8	−6	−3	0	3	6	8
y							

410. Вычислите устно:

а) $5{,}1 + 8{,}4 - (-5{,}1) - 10{,}2 - (+8{,}4) - 9{,}8 - (-15)$;

б) $-7{,}81 + 9{,}64 - 5{,}32 - (+7{,}81) + (+5{,}32) - 9{,}64$;

в) $13{,}4 + 8{,}22 - (+1{,}3) - (-4{,}78) + (-8) - 10 - 3{,}4$;

г) $-21 + (-0{,}68) - (-7{,}4) + (-3{,}2) - (+6{,}8) + 21{,}68$;

д) $-48 + 51 : 10 + 4{,}8 \cdot 10 + (-6{,}4) - 5{,}1 - (-7{,}2) - (+3)$;

е) $93 + 8{,}23 \cdot 10 - (-9{,}6) + (-82{,}3) + 9{,}3 \cdot (-10) - (+0{,}4)$;

ж) $2{,}4 : (-2) - 3{,}8 - (-5{,}9) - (+6{,}2) + 1{,}2 + 4{,}1$;

з) $-(-7{,}7) + (-8{,}1) : 9 + 0{,}9 - (+1{,}4) + 15{,}4 : 2 - (-8{,}2)$.

411. а) Наибольшее целое число из открытого луча $(-\infty; -2)$ умножили на наименьшее целое число из луча $[-4; +\infty)$. Сколько получилось?

б) Наименьшее целое число из открытого луча $(-19; +\infty)$ разделили на наименьшее целое число из луча $[5{,}8; +\infty)$. Сколько получилось?

в) Наименьшее целое число из интервала $(-7{,}8; -2)$ умножили на наибольшее целое число из отрезка $[-4; -3{,}5]$. Сколько получилось?

г) Наибольшее целое число из интервала $(-5{,}1; 27{,}9)$ разделили на наименьшее целое число из отрезка $[-9{,}7; 0]$. Сколько получилось?

412. Даны две координатные прямые — ось x и ось t, на которых отмечены, соответственно, отрезок и интервал (рис. 71):

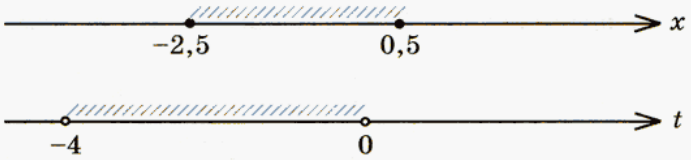


Рис. 71

Запишите все возможные пары целых чисел (x, t) таких, что x принадлежит указанному отрезку, а t — указанному интервалу.

413. а) Супертрейлер, длина которого составляет 18 м, проезжает мимо километрового столба за 9 с. За какое время он на той же скорости проедет мост длиной 36 м?

б) Поезд, длина которого составляет 120 м, проезжает железнодорожный мост длиной 360 м за 30 с. За какое время он на той же скорости проедет мимо столба?

Контрольное задание

Укажите координаты отмеченных клеток шахматной доски (рис. 72).

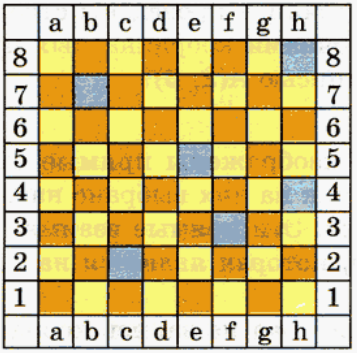


Рис. 72

§ 14. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

414. Рассмотрите рисунок 73 и расскажите, что на нем изображено.

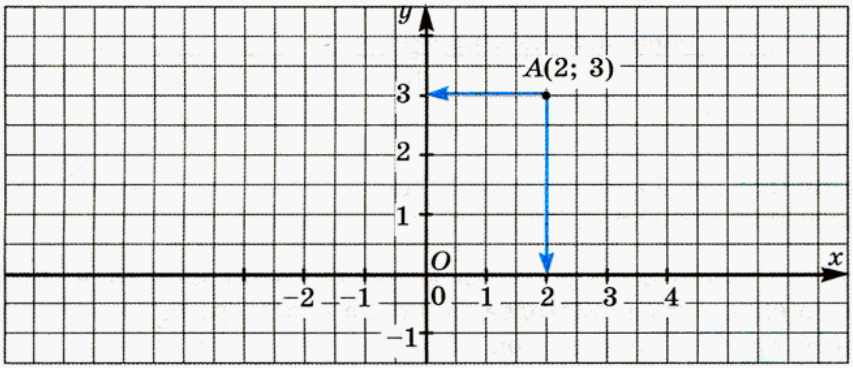


Рис. 73

В этом вам помогут следующие вопросы и задание.

- Можно ли утверждать, что на рисунке изображены *координатные* прямые? Почему?
- Под каким углом расположены эти прямые друг к другу?
- Охарактеризуйте точку пересечения этих прямых.
- Что напоминает запись $A(2; 3)$? Чем она отличается от записи координаты точки на координатной прямой?
- Под каким углом из точки A проведены стрелки к прямым Ox и Oy?
- Какая связь между точками координатных прямых, на которые указывают стрелки, и записью $A(2; 3)$?

Проверьте себя.

На рисунке 73 изображены прямые Ox и Oy. Эти прямые — координатные, так как на них выбрано начало отсчета, направление и единичные отрезки. Эти прямые взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке, которая является началом отсчета для каждой из них.

Запись $A(2; 3)$ похожа на запись координаты точки на прямой, однако здесь указаны два числа, а не одно.

Из точки A к прямым Ox и Oy стрелки проведены под прямым углом. Вертикальная стрелка указывает на точку 2 координатной

прямой Ox, соответствующее число стоит на первом месте в записи $A(2; 3)$. Горизонтальная стрелка указывает на точку 3 координатной прямой Oy, соответствующее число стоит на втором месте в записи $A(2; 3)$.

Запись $A(2; 3)$ позволяет определить положение точки A уже не на прямой, а на плоскости. Это возможно потому, что мы взяли не одну, а две координатные прямые и расположили их под прямым углом так, что начало отсчета каждой из них совпало с точкой их пересечения.

Две взаимно перпендикулярные координатные прямые, пересекающиеся в точке, которая является началом отсчета для каждой из них, образуют **систему координат**. Прямые, образующие систему координат, называют **координатными осями**, каждая из которых имеет свое название: горизонтальная — **ось абсцисс**, вертикальная — **ось ординат** (рис. 74).

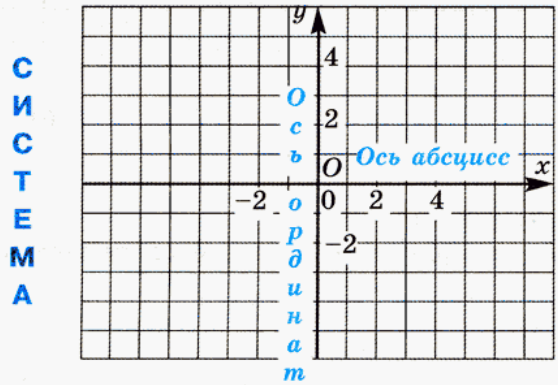


Рис. 74

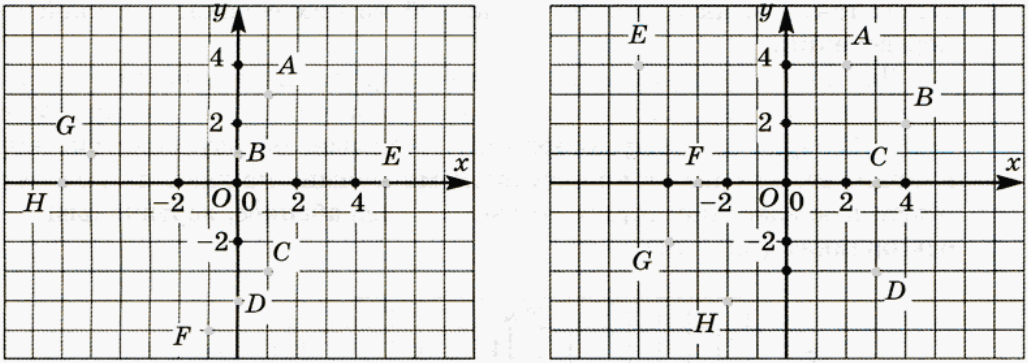
Плоскость, на которой выбрана система координат, называют **координатной плоскостью**. Каждая точка такой плоскости имеет две координаты, которые можно определить, опустив перпендикуляры на координатные оси, как в случае с точкой $A(2; 3)$ (см. рис. 73). **Координаты точки на плоскости** — это пара чисел, в которой на первом месте стоит *абсцисса*, а на втором — *ордината* этой точки.

Абсцисса **Ордината**

$$A(2;\ 3)$$

Координаты можно указать для любой точки координатной плоскости: *для этого надо из точки опустить перпендикуляры на координатные оси и определить, какому числу координатной оси соответствует основание перпендикуляра.*

415. Запишите координаты отмеченных точек (рис. 75). Назовите абсциссу и ординату.

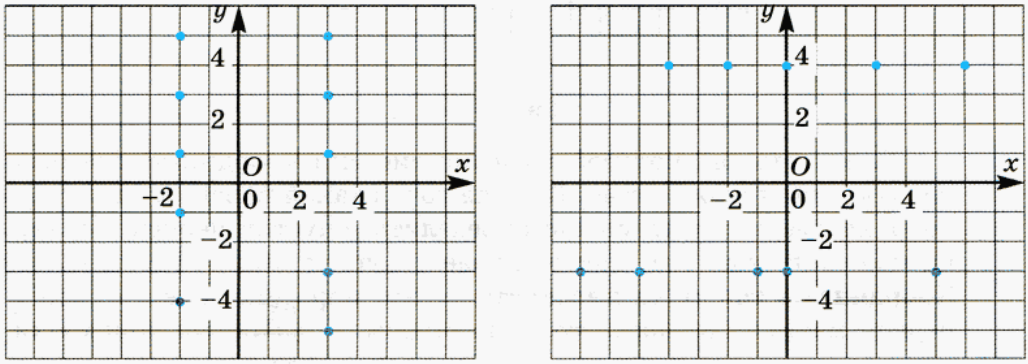


а) б)

Рис. 75

У **416.** Рассмотрите рисунок 76.

1) Запишите координаты точек, абсцисса которых равна −2; 3 (рис. 76, а).



а) б)

Рис. 76

2) Запишите координаты точек, ордината которых равна 4; −3 (рис. 76, б).

3) Как расположены точки, имеющие одну и ту же абсциссу? ординату?

Пусть теперь требуется по известным координатам определить положение точки на плоскости. Для этого выполняют обратные действия: через точки координатных осей, соответствующие абсциссе и ординате, проводят прямые, перпендикулярные осям, и находят точку их пересечения. Это и будет искомая точка — точка с заданными координатами. На рисунке 77 показано, как найти точку $M(3; -4)$.

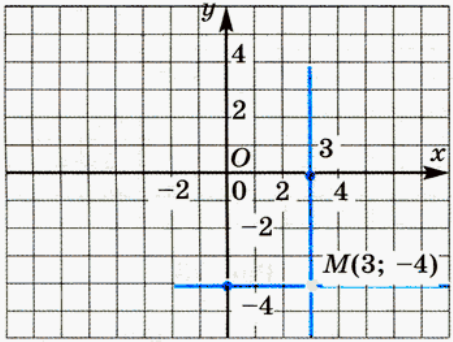


Рис. 77

417. Начертите в тетради систему координат, взяв единичный отрезок длиной 1 см (две тетрадные клетки). Отметьте точки:

а) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(-2; 4)$, $D(-1; 4)$, $E(3; -2)$, $F(1; -1)$;

б) $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$, $C(3; 0)$, $D(3; -3)$, $E(-3; 2)$, $F(-3; 1)$.

Отметьте точки с заданными координатами, проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы:

418. а) $A(0; 5)$, $B(0; 3)$, $C(0; 1)$, $D(0; -1)$, $E(0; -2)$, $F(0; -3)$;

б) $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(-2; 0)$, $D(-1; 0)$, $E(3; 0)$, $F(-3; 0)$.

419. а) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$;

б) $A(0; 3)$, $B(-3; 0)$, $C(0; -3)$, $D(3; 0)$.

420. а) $A(2; 5)$, $B(2; 3)$, $C(2; 1)$, $D(2; -1)$, $E(2; -2)$, $F(2; -3)$;

б) $A(1; -3)$, $B(4; -3)$, $C(-2; -3)$, $D(-1; -3)$, $E(3; -3)$, $F(-3; -3)$.

Сравните свои выводы со следующими утверждениями:

- точки, абсцисса которых равна нулю, лежат на оси ординат;
- точки, ордината которых равна нулю, лежат на оси абсцисс;
- точки, имеющие одну и ту же абсциссу, лежат на одной прямой, которая параллельна оси ординат;
- точки, имеющие одну и ту же ординату, лежат на одной прямой, которая параллельна оси абсцисс.

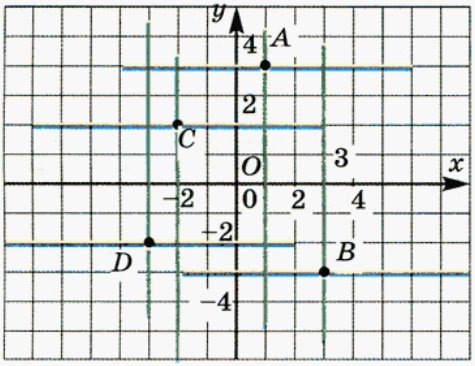


Рис. 78

421. Рассмотрите рисунок 78. Что показано на этом рисунке? Охарактеризуйте линии, выделенные одним цветом. Как они расположены по отношению к осям координат?

Проверьте себя.

На рисунке 78 показано, как по заданным координатам были построены точки A, B, C и D.

Прямые, выделенные зеленым цветом, — это перпендикуляры к оси абсцисс. Они параллельны оси ординат.

Прямые, выделенные коричневым цветом, — это перпендикуляры к оси ординат. Они параллельны оси абсцисс.

Выполните следующие задания, считая, что длина единичного отрезка равна 1 см.

422. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если:

а) $A(2; 2)$, $B(2; 7)$, $C(10; 7)$, $D(10; 2)$;

б) $A(-9; -3)$, $B(-2; -3)$, $C(-2; -8)$, $D(-9; -8)$;

в) $A(-4; 5)$, $B(-4; -5)$, $C(-8; -5)$, $D(-8; 5)$;

г) $A(-3; -4)$, $B(-3; 4)$, $C(3; 4)$, $D(3; -4)$.

423. $ABCD$ — прямоугольник. Определите координаты точки D, если:

а) $A(-9; -2)$, $B(-9; 4)$, $C(-3; 4)$;
б) $A(0; 6)$, $B(0; -2)$, $C(5; -2)$;
в) $A(9; 0)$, $B(9; -5)$, $C(2; -5)$;
г) $A(-6; 0)$, $B(-6; -7)$, $C(0; -7)$.

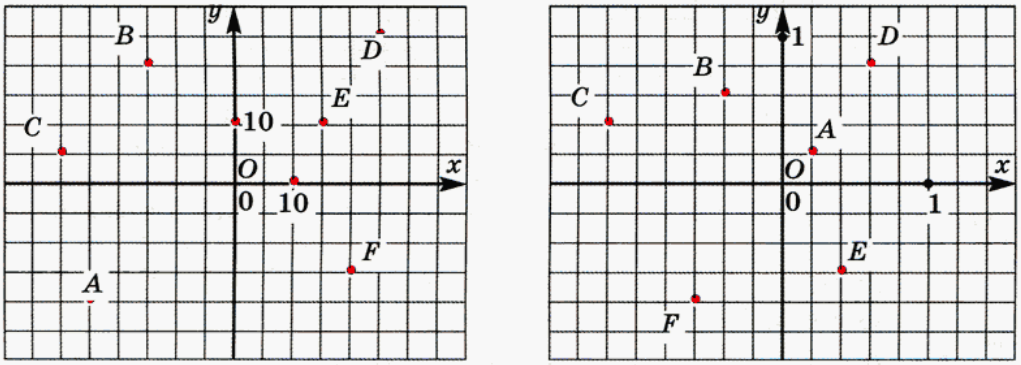
Найдите площадь треугольника ABC, если:

424. а) $A(3; 0)$, $B(0; 0)$, $C(0; 4)$;
б) $A(0; -2)$, $B(5; -2)$, $C(5; 0)$;
в) $A(-2; 0{,}5)$, $B(1{,}5; 4)$, $C(1{,}5; 0{,}5)$;
г) $A(-4; 1{,}5)$, $B(0; 0)$, $C(-4; -3{,}5)$.

425. а) $A(-6; 6)$, $B(-6; 4)$, $C(6; 3)$;
б) $A(-10; 2)$, $B(4; 7)$, $C(-1; 2)$;
в) $A(-3; 8)$, $B(4; -2)$, $C(7; 8)$;
г) $A(-3; -6)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 4)$.

426. а) $A(1; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 3)$;
б) $A(-2; -2)$, $B(-3; 2)$, $C(3; 0)$;
в) $A(-2; -1)$, $B(1; 2)$, $C(3; -3)$;
г) $A(-4; 0{,}5)$, $B(2; -2)$, $C(-1; 3{,}5)$.

427. Определите координаты отмеченных точек (рис. 79).



а) б)

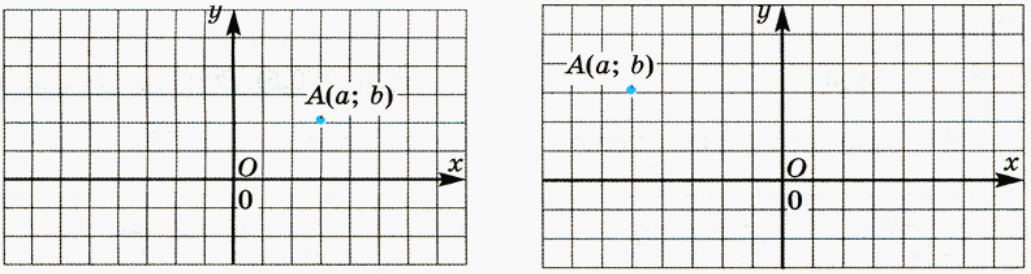
Рис. 79

428. Выберите подходящий масштаб и отметьте на координатной плоскости точки:

а) $M(0; 50)$, $N(100; 300)$, $K(150; -200)$, $L(-300; -350)$;
б) $M(15; 0)$, $N(-15; 30)$, $K(90; -15)$, $L(-60; -45)$;
в) $M\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}\right)$, $N\left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\right)$, $K\left(-\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$, $L\left(-\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$;
г) $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, $N\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{8}; -\frac{7}{8}\right)$, $L\left(-\frac{3}{8}; -\frac{5}{8}\right)$.

429. Отметьте на координатной плоскости точки, симметричные точке $A(2; 3)$ относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Запишите координаты полученных точек и сравните их с координатами точки A. Сделайте вывод.

430. Отметьте на координатной плоскости точку $A(a; b)$ так же, как на рисунке 80. Укажите точки, симметричные точке A относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Запишите их координаты.



а) б)

Рис. 80

431. Постройте отрезок, симметричный отрезку MN относительно оси абсцисс, и запишите координаты его концов, если:

а) $M(0; 5)$, $N(1; 3)$;
б) $M(-2; 5)$, $N(-3; -3)$;
в) $M(3; -2)$, $N(3; 4)$;
г) $M(-4; -5)$, $N(-4; 5)$.

432. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно оси ординат, и запишите координаты его вершин, если:

а) $A(0; 1)$, $B(3; 0)$, $C(1; -2)$;
б) $A(-3; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 3)$;
в) $A(-2{,}5; -1{,}5)$, $B(1; 2)$, $C(4; 1)$;
г) $A(0; 3)$, $B(-2; -1{,}5)$, $C(2; -1{,}5)$.

433. Постройте четырехугольник, симметричный четырехугольнику $ABCD$ относительно начала координат, и запишите координаты его вершин, если:

а) $A(2; 4)$, $B(2; 7)$, $C(5; 7)$, $D(5; 1)$;
б) $A(-4; 0)$, $B(1; 7)$, $C(3; 7)$, $D(4; 2)$;
в) $A(-6; 2)$, $B(-7; 7)$, $C(-2; 6)$, $D(0; 0)$;
г) $A(-5; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(5; 3)$, $D(2; -3)$.

В № 434—436 укажите три точки, координаты которых отвечают данным условиям, и покажите, где на координатной плоскости расположены *все* такие точки.

434. а) Абсцисса равна 2; в) абсцисса равна −2;
б) ордината равна 2; г) ордината равна −2.

435. а) Абсцисса положительна; в) абсцисса отрицательна;
б) ордината положительна; г) ордината отрицательна.

436. а) Абсцисса равна ординате;
б) абсцисса и ордината — противоположные числа;
в) абсцисса больше ординаты;
г) ордината больше абсциссы.

437. Скопируйте в тетрадь рисунок 81 и закрасьте ту часть фигуры, точки которой отвечают указанным условиям (единичный отрезок — 1 клетка):

1) абсцисса и ордината имеют одинаковые знаки (обе положительны или обе отрицательны);
2) ордината меньше 2, но больше −2;
3) ордината больше 0, но меньше 2;
4) абсцисса больше −3, но меньше 3.

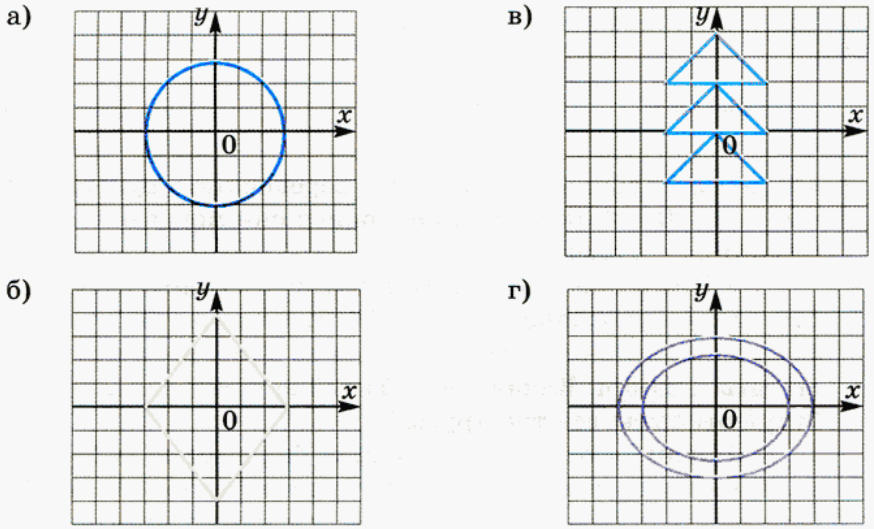


Рис. 81

438. Выполните действия:

а) $-5 \cdot 0{,}08 + 2{,}32 : (-5) - 7{,}2 \cdot 0{,}05$;

б) $-0{,}02 : 0{,}005 \cdot (-1) + 28 : (-0{,}7)$;

в) $(0{,}48 : 0{,}6 - 0{,}34 : 0{,}017) + (-16{,}8) \cdot 0{,}4$;

г) $1{,}25 : (-0{,}5) - (1{,}2 \cdot 0{,}3 - 2{,}15 \cdot 1{,}2)$.

439. а) Из целых чисел, принадлежащих интервалу $(-3; 1)$, наугад выбирают одно число. Сколькими способами это можно сделать?

б) Из целых чисел, принадлежащих отрезку $[-3; 1]$, наугад выбирают одно число. Сколькими способами это можно сделать?

440. а) Из целых чисел, принадлежащих интервалу $(-3; 1)$, наугад выбирают два числа. Сколькими способами это можно сделать?

б) Из целых чисел, принадлежащих отрезку $[-3; 1]$, наугад выбирают два числа. Сколькими способами это можно сделать?

Упростите выражение:

441. а) $8x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\frac{2}{3} \cdot (-6x)$; в) $-\frac{3}{8} \cdot (-12x)$; г) $-15x \cdot \frac{4}{25}$.

442. а) $\frac{1}{6} \cdot (-9y)$; в) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-10x)$; д) $3y \cdot \left(-\frac{7}{15}\right)$;

б) $14y \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$; г) $-4x \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)$; е) $\frac{11}{26} \cdot (-13y)$.

443. а) Одна машинистка может перепечатать рукопись за 5 ч, другая — за 10 ч. Какую часть рукописи они могут перепечатать за 1 ч, работая одновременно?

б) В бассейн проведены три трубы. С помощью первой трубы бассейн можно наполнить за 10 ч, с помощью второй — за 8 ч, с помощью третьей трубы вся вода из наполненного бассейна может вылиться за 5 ч. Какая часть бассейна будет наполнена за 1 ч, если будут открыты все три трубы?

в) Один насос может наполнить бак нефтью за 15 мин, другой — за 20 мин, а третьему насосу на это потребуется 30 мин. Какую часть бака могут наполнить нефтью все три насоса вместе за 1 мин?

Контрольные задания

1. На координатной плоскости укажите:
   а) ось абсцисс; б) ось ординат.
2. Определите координаты отмеченных точек (рис. 82).

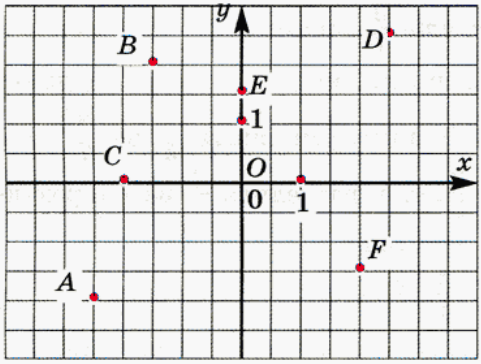


Рис. 82

3. Отметьте на координатной плоскости точки
   $A(1; 6)$, $B(-2; -3)$, $C(0; 4)$, $D(-5; 0)$.
4. Покажите, где на координатной плоскости расположены точки:
   а) абсцисса которых равна 3;
   б) ордината которых равна –4.

§ 15. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

444. а) У мамы было 4800 р. Она взяла $\frac{5}{8}$ этой суммы, чтобы оплатить коммунальные услуги. Сколько денег взяла мама?

б) Площадь приусадебного участка составляет $\frac{2}{5}$ га. Под огород отведено $\frac{3}{7}$ этого участка. Определите площадь огорода.

Для того чтобы понять правило умножения дроби на дробь, подумайте над такими вопросами:

1) что значит $\frac{2}{5}$ умножить на 3; 2) что значит $\frac{2}{5}$ умножить на $\frac{3}{7}$?

Проверьте себя.

Ответ на первый вопрос наверняка не вызвал затруднений: умножить число на 3 — это означает найти сумму трех слагаемых, каждое из которых равно этому числу, другими словами, *взять это число трижды*.

Опираясь на это, отвечаем и на второй вопрос: умножить число на $\frac{3}{7}$ означает *взять* $\frac{3}{7}$ *этого числа*. Такие задачи мы решали: чтобы взять (найти) $\frac{3}{7}$ числа, надо это число разделить на 7 и результат умножить на 3. Значит, умножить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{7}$ — это то же самое, что найти $\frac{3}{7}$ числа $\frac{2}{5}$, т. е. разделить $\frac{2}{5}$ на 7 и результат умножить на 3. Выполним эти действия:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{2}{5} : 7\right) \cdot 3 = \frac{2}{5 \cdot 7} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}.$$

Запишем равенство первого и последнего выражений из этой цепочки:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}.$$

Из него видно, что при умножении дроби на дробь в результате получается дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей множителей.

К этому выводу можно прийти и другим путем.

У **445.** Сравните данные, условия и решения следующих задач. Подумайте, как, опираясь на решение первой задачи, можно найти ответ для второй.

Найдите площадь куска ткани прямоугольной формы шириной $\frac{3}{4}$ м и длиной 5 м.	Найдите площадь листа бумаги прямоугольной формы с измерениями $\frac{3}{4}$ м и $\frac{5}{7}$ м.
Решение: $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$ (м²).	Решение: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = ?$
Ответ: $\frac{15}{4}$ м².	Ответ: ?

Подсказка.

Вспомните, какое арифметическое действие означает черта дроби, и сравните числа 5 и $\frac{5}{7}$.

Проверьте себя.

При правильных рассуждениях у вас должно было получиться $\frac{15}{28}$ м^2. Если вы этот ответ не получили, прочитайте следующий текст.

Черта дроби означает деление, т. е. $\frac{5}{7} = 5 : 7$. Значит, числовое выражение в решении второй задачи отличается от первого тем, что в нем второй множитель меньше в 7 раз, следовательно, и произведение должно быть в 7 раз меньше.

Таким образом, чтобы получить ответ во второй задаче, надо число, полученное в ответе к первой задаче, уменьшить в 7 раз:

$$\frac{15}{4} : 7 = \frac{15}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

Сравнивая равные выражения $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ и $\frac{15}{28}$, получаем тот же результат — ***произведение обыкновенных дробей — это дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей данных дробей:***

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Вычислите:

446. а) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7}$; б) $\frac{7}{11} \cdot \frac{22}{5}$; в) $\left(-\frac{14}{17}\right) \cdot \frac{1}{3}$; г) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)$.

447. а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$; в) $\frac{6}{13} \cdot \left(-\frac{5}{1}\right)$; г) $-\frac{35}{41} \cdot \frac{41}{35}$.

448. Подумайте, чему равно произведение дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$. Вспомните, как называются такие числа.

Проверьте себя.

Числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.

449. Найдите устно значение выражения:

а) $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}$; б) $\frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7}$; в) $\frac{6}{17} \cdot \frac{17}{51} \cdot \frac{17}{6}$; г) $\frac{91}{16} \cdot \frac{16}{91} \cdot 3$.

450. Вычисляя значение выражения $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5}$, Таня записала:

$$2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5} = 6\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 6\frac{1}{5}.$$

Правильно ли умножала Таня? Как бы вы перемножили эти смешанные числа?

Проверьте себя.

Таня ошиблась — должно быть так:

$$2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 5} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}.$$

При умножении смешанных чисел их надо сначала превратить в неправильные дроби.

Вычислите:

451. а) $1\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{11} \cdot 1\frac{5}{6}$; г) $5\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{20}$.

452. а) $2\frac{1}{6} \cdot 2\frac{1}{4}$; б) $2\frac{1}{7} \cdot 1\frac{2}{5}$; в) $3\frac{5}{9} \cdot 4\frac{7}{8}$; г) $1\frac{1}{12} \cdot \frac{8}{11}$.

453. Найдите произведение $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$.

Решите задачи:

454. От базы до первого привала турист шел $3\frac{1}{5}$ ч. Зная, что средняя скорость туриста оказалась равной $4\frac{1}{8}$ км/ч, определите, какое расстояние прошел турист.

455. По дороге из дома в школу Петя насчитал 575 шагов. Какое расстояние прошел Петя, если каждый шаг на $\frac{3}{5}$ м приближал его к школе?

456. Из бака выходят две трубы. Через одну из них вытекает $\frac{4}{5}$ л воды в минуту, а через другую — в полтора раза больше. Полный бак опорожняется через обе трубы за 3 ч 20 мин. Сколько литров воды вмещает бак?

457. Один градус шкалы Цельсия равен $\frac{4}{5}$ градуса шкалы Реомюра. Сколько градусов покажет термометр Реомюра, когда термометр Цельсия покажет $22\frac{1}{2}$°?

О **458.** Высота прямоугольного окна $1\frac{2}{3}$ м, а его ширина составляет $\frac{2}{5}$ высоты. Найдите площадь окна.

О **459.** Проволоку длиной $34\frac{1}{2}$ м разрезали на три части. Первая часть составила $\frac{1}{4}$ всей проволоки, вторая — $\frac{8}{9}$ проволоки, оставшейся после того, как отрезали первую часть. Найдите длину каждой части проволоки.

О **460.** Ширина зала $8\frac{2}{5}$ м, длина его в два с половиной раза больше ширины, а высота составляет $\frac{3}{13}$ длины. Зная, что масса 1 м^3 воздуха равна примерно $1\frac{3}{10}$ кг, определите, какую массу имеет воздух, наполняющий зал.

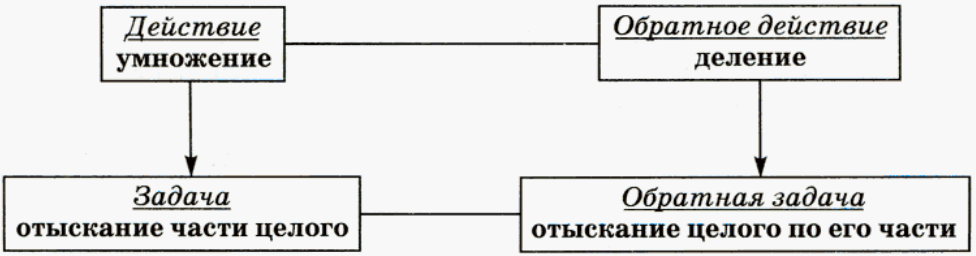
У **461.** а) На подарок бабушке из своей копилки Наташа взяла 152 р., что составило $\frac{4}{5}$ накопленной суммы. Сколько денег накопила Наташа?

б) Под плодовые деревья отведено $\frac{2}{5}$ га, что составляет $\frac{3}{4}$ площади садового участка. Найдите площадь участка.

Для того чтобы понять, каким образом выполняется деление дроби на дробь, подумайте, что значит разделить, к примеру, $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$.

Проверьте себя.

Вспомним: умножить число на $\frac{3}{4}$ — это значит найти $\frac{3}{4}$ этого числа. Деление — действие, обратное умножению. Умножение на дробь — это отыскание части числа, значит, деление на дробь — это отыскание числа по его части, выраженной этой дробью.



Таким образом, разделить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$ — это значит найти число, $\frac{3}{4}$ которого равны $\frac{2}{5}$. Решать такие задачи мы умеем, значит, сможем разделить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{5} : 3\right) \cdot 4 = \frac{2}{5 \cdot 3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3}.$$

Значит, $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3}$.

Из этого равенства видно, что получается в частном при делении дроби на дробь:

1) числитель частного — это произведение числителя делимого на знаменатель делителя;

2) знаменатель частного — это произведение знаменателя делимого на числитель делителя.

Этот же результат можно получить путем рассуждений.

У **462.** Сравните данные, условия и решения следующих задач. Подумайте, как, опираясь на решение первой задачи, можно найти ответ для второй.

Площадь прямоугольника равна $\frac{7}{8}$ м², а его длина — 2 м. Найдите ширину прямоугольника.	Площадь прямоугольника равна $\frac{7}{8}$ м², а одна из его сторон — $\frac{2}{5}$ м. Найдите вторую сторону прямоугольника.
Решение: $\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{8 \cdot 2} = \frac{7}{16}$.	Решение: $\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = ?$

Подсказка.

- Вспомните, с чего начинается деление на десятичную дробь;
- попробуйте заменить деление числа на обыкновенную дробь делением на натуральное число.

Проверьте себя.

Чтобы заменить деление числа на дробь делением на натуральное число, умножим и делимое и делитель на знаменатель делителя, в нашем случае это число 5:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \left(\frac{7}{8} \cdot 5\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot 5\right) = \frac{7 \cdot 5}{8} : 2 = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 2}.$$

Таким образом, $\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 2}$.

Опять видим, что числитель частного — это произведение числителя делимого на знаменатель делителя, а знаменатель частного — это произведение знаменателя делимого на числитель делителя.

463. Выполните деление:

а) $\frac{4}{5} : \frac{3}{4}$; б) $\frac{6}{7} : \frac{2}{5}$; в) $\frac{4}{9} : \frac{1}{2}$; г) $\frac{7}{12} : \frac{8}{11}$.

464. 1) Выполните действия: а) $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3}$.

2) Сравните результаты и сделайте вывод. Как называются дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$?

465. Постарайтесь самостоятельно сформулировать правило деления обыкновенных дробей, используя установленное свойство.

Проверьте себя.

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно умножить это число на дробь, обратную делителю.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Запишите числа, обратные данным:

466. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{12}{7}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{25}$; д) $5\frac{2}{3}$; е) $7\frac{3}{5}$.

467. Вычислите:

а) $\frac{5}{12} : \frac{3}{8}$; б) $\left(-\frac{15}{31}\right) : \frac{1}{2}$; в) $\frac{51}{60} : \left(-\frac{17}{20}\right)$; г) $-\frac{47}{40} : \left(-\frac{3}{4}\right)$.

468. Выполните действия:

а) $\frac{2}{11} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) : \frac{7}{8}$; в) $\frac{13}{14} : \frac{3}{10} : \left(-\frac{3}{5}\right)$; д) $\frac{6}{35} \cdot \left(-\frac{7}{12}\right) : \frac{15}{56}$;

б) $-\frac{4}{9} : \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)$; г) $-\frac{4}{17} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{17}{4}\right)$; е) $-\frac{1}{17} : \frac{17}{30} \cdot \left(-\frac{5}{22}\right)$.

470. Вычислите:

а) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{7} : \frac{2}{5}$; в) $\frac{6}{11} : \frac{3}{11}$; г) $\frac{13}{5} : \frac{26}{15}$.

471. Какое число нужно поставить вместо *, чтобы записанное равенство стало верным:

а) $\frac{3}{5} : \frac{*}{4} = \frac{12}{35}$; б) $\frac{4}{7} : \frac{6}{*} = \frac{10}{21}$; в) $\frac{3}{4} : \frac{*}{8} = \frac{2}{3}$; г) $\frac{*}{8} : \frac{35}{12} = \frac{3}{10}$?

На какое число нужно разделить дробь $\frac{10}{21}$, чтобы получить данное число:

472. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{5}{21}$?

473. а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{10}{7}$; в) $\frac{10}{21}$; г) $\frac{21}{10}$?

$$\frac{a}{b} : x = \frac{m}{n}$$

$$x = \frac{a}{b} : \frac{m}{n}$$

474. а) 1; б) 2; в) 3; г) 7?

475. На что надо умножить данное число, чтобы в произведении получить 1:

а) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$; б) 4, 11; в) $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{5}$; г) -7, $-\frac{5}{9}$?

476. Сколько раз:

а) $\frac{3}{4}$ содержится в 15;

б) $\frac{2}{3}$ содержится в 20;

в) $\frac{2}{5}$ содержится в 8;

г) $\frac{3}{7}$ содержится в 30?

477. Вычислите:

а) $4 : \frac{2}{5}$; $15 : \frac{5}{7}$; $24 : \frac{4}{9}$;

б) $18 : 2\frac{1}{4}$; $10 : 1\frac{7}{8}$; $35 : 2\frac{4}{5}$;

в) $\frac{5}{8} : \frac{4}{9}$; $\frac{15}{14} : \frac{20}{7}$; $\frac{17}{30} : \frac{7}{15}$;

г) $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{4}$; $1\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{5} : \frac{5}{23}$.

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}$$

478. Что произойдет с частным, если:

а) и делимое и делитель умножить на $\frac{2}{5}$;

б) делитель разделить на $\frac{2}{5}$;

в) делимое умножить на $\frac{2}{3}$, а делитель разделить на $\frac{2}{3}$;

г) делимое умножить на $\frac{7}{4}$, а делитель умножить на $\frac{4}{7}$?

479. Делимое умножили на 9. Что надо сделать с делителем, чтобы частное:

а) увеличилось в два с половиной раза;

б) уменьшилось в два с половиной раза?

480. Вычислите:

а) $\frac{3}{7} \cdot 0{,}2$; б) $\frac{3}{7} : 0{,}2$; в) $2\frac{1}{3} \cdot 1{,}25$; г) $1{,}25 : 2\frac{1}{3}$.

481. Найдите значение выражения:

а) $(-2)^2$; $(-2)^3$; -2^2; -2^3; б) $(-1)^{2000}$; $(-1)^{2001}$; -1^{2000}; -1^{2001}.

482. Найдите значения выражений x^2; $-x^2$; $(-x)^2$; $-(x^2)$ при $x = 3$ и при $x = -3$, проанализируйте полученные результаты.
Подумайте, какие из этих выражений равны при любых значениях x.

483. Найдите значение каждого выражения при $x = 3$ и при $x = -3$, проанализируйте полученные результаты:

а) x^3; б) $-x^3$; в) $(-x)^3$; г) $-(x^3)$.

Есть ли среди выражений такие, которые равны при любых значениях x?

484. 1. Прочитайте выражения и найдите значение каждого из них при $a = -2$, $b = 4$:

а) $a^2 - b^2$; б) $(a + b)^2$; в) $a^2 + 2ab + b^2$; г) $(a - b)(a + b)$.

2. Укажите выражения, значения которых равны. Сами выберите какие-нибудь числа и найдите значение каждого выражения.

485. 1. Прочитайте выражения и найдите значение каждого из них при $a = 3$, $b = -5$:

а) $a^2 - b^2$; б) $(a - b)^2$; в) $a^2 - 2ab + b^2$; г) $(a - b)(a + b)$.

2. Укажите выражения, значения которых равны. Возьмите сами какие-нибудь числа и найдите значения данных выражений.

486. 1. Найдите значение каждого выражения при $a = -4$, $b = -8$:

а) $a^2 - b^2$; б) $(a - b)^2$; в) $(a - b) \cdot (a + b)$; г) $a^2 - 2ab + b^2$.

2. Укажите выражения, значения которых равны. Сами выберите какие-нибудь числа и найдите значения этих выражений.

487. 1. Найдите значение каждого выражения при $a = -1$ и $b = -6$:

а) $a^2 - b^2$; в) $(a + b)^2$; д) $(a - b)^2$;
б) $(a - b) \cdot (a + b)$; г) $a^2 + 2ab + b^2$; е) $a^2 - 2ab + b^2$.

2. Укажите, какие выражения имеют равные значения. Сами выберите какие-нибудь числа и найдите значения этих выражений.

Решите уравнение:

488. а) $3x = -15$; б) $-7x = -21$; в) $-25x = 5$; г) $9x = -81$.

489. а) $-10y = 2$; б) $16y = -4$; в) $-8y = -64$; г) $-14y = -7$.

490. Дана аналитическая модель открытого луча. Постройте его геометрическую модель и сделайте соответствующую символическую запись:

а) $x < 6$; б) $x > 24$; в) $x < -1{,}5$; г) $x > -0{,}4$.

491. Дана аналитическая модель числового промежутка. Постройте его геометрическую модель, запишите название и составьте соответствующую символическую запись:

а) $x \leqslant -7$; в) $-5 < x < -1{,}5$; д) $x > -15$;
б) $x \geqslant 3{,}5$; г) $-8{,}5 \leqslant x \leqslant -1$; е) $x < 2{,}3$.

Контрольные задания

1. Закончите предложение:
   а) «Чтобы умножить дробь на дробь, нужно...»;
   б) «Чтобы разделить число на дробь, нужно...»
2. Найдите значение выражения:
   а) $\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{28}$; б) $\frac{5}{18} : \frac{10}{27}$.

§ 16. ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

У **492.** Собрание для проведения тайного голосования по важному вопросу избрало счетную комиссию, в состав которой вошли Антонов, Борисова и Ващенко. Члены счетной комиссии должны распределить обязанности: председатель, заместитель, секретарь. Сколькими способами они могут это сделать?

Подобные задачи вы решали в 5-м классе, да и в этом учебнике они вам встречались. Решите эту задачу самостоятельно.

Проверьте себя.

Всего имеется 6 вариантов распределения обязанностей. Чтобы ответить, вам пришлось осуществить *перебор всех возможных вариантов*, или, как чаще говорят, *комбинаций*. Поэтому подобные задачи называют *комбинаторными*. Просчитывать возможные комбинации (варианты) в жизни приходится довольно часто.

Хотя задача и простая, обсудим ее решение. Построим *дерево возможных вариантов* (рис. 83), используя *кодировку*: А — Антонов, Б — Борисова, В — Ващенко; кроме того, порядок расположения букв

будет соответствовать распределению функциональных обязанностей: первая буква — председатель, вторая буква — заместитель, третья буква — секретарь. Например, кодировка ВБА означает, что Ващенко — председатель, Борисова — заместитель и Антонов — секретарь.

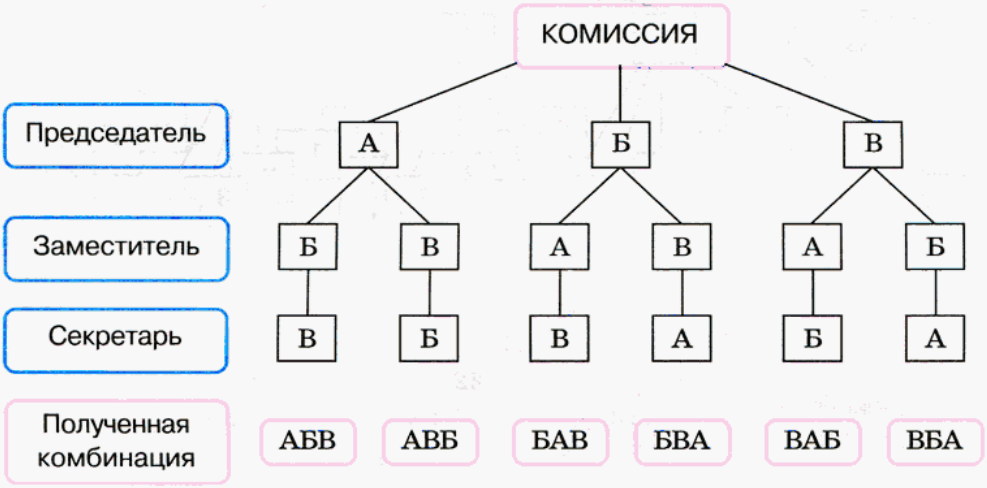


Рис. 83

Итого получилось 6 вариантов распределения обязанностей между членами комиссии.

Дерево вариантов можно считать *геометрической моделью* рассматриваемой ситуации. На самом деле обычно обходятся без дерева вариантов, используют логические рассуждения и здравый смысл. Смотрите: председателем может быть любой из трех членов комиссии (3 варианта). Если председатель выбран, то заместителем может быть любой из двух оставшихся членов комиссии (2 варианта), а секретаря уже выбирать не из кого, им будет оставшийся член комиссии. Итого $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов.

У **493.** Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4? Решите эту задачу двумя способами:

- при помощи дерева возможных вариантов;
- при помощи логических рассуждений.

I способ.

Чтобы проверить свои рассуждения, рассмотрите рисунок 84. На нем изображено дерево вариантов для данной ситуации.

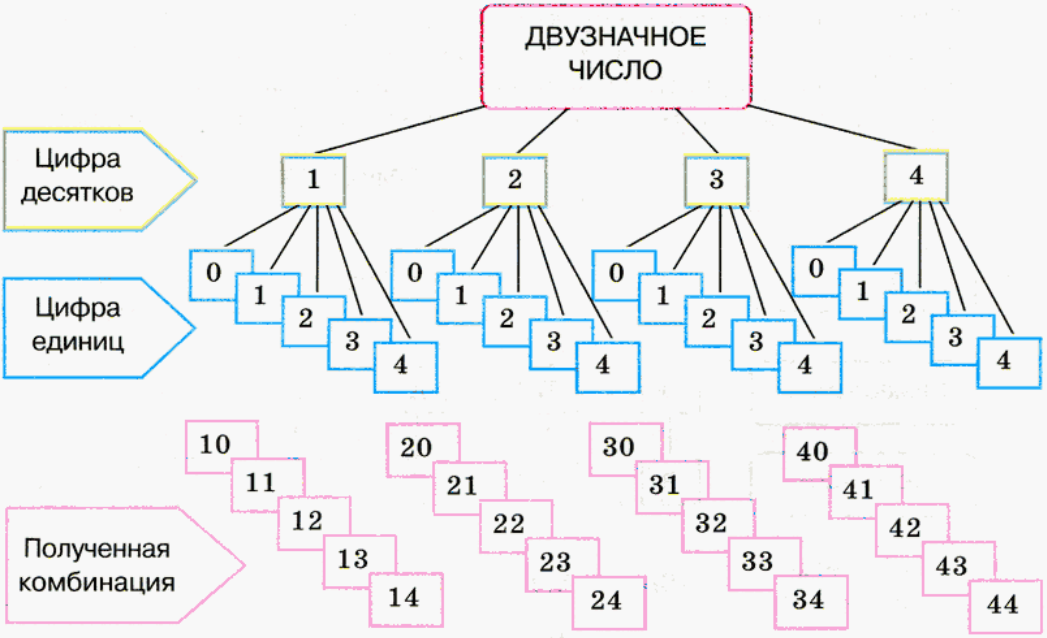


Рис. 84

Ответьте на вопросы:

- Почему от «ствола» отходит только 4 «ветви»? Что они означают?
- Что означает вторая группа «ветвей»?
- Почему от каждой «ветви» первой группы отходит по 5 «ветвей» второй группы?
- Сколько двузначных чисел получилось?

Проверьте себя.

У интересующих нас двузначных чисел на первом месте (цифра десятков) может находиться любая из заданных цифр, кроме цифры 0 (не существует двузначного числа, начинающегося с цифры 0). Значит, цифрой десятков может служить одна из цифр 1, 2, 3 или 4. Поэтому в первой группе только 4 «ветви».

Для каждого из этих случаев возможны 5 вариантов для цифры единиц — 0, 1, 2, 3 или 4. На рисунке это изображается пятью «ветвями», отходящими от каждой из «ветвей», соответствующих цифре десятков.

Таким образом, получаем, что из данных цифр можно составить 20 различных двузначных чисел.

II способ.

Для первой цифры есть 4 варианта, а для второй — 5 вариантов. Если 4 умножить на 5, получится 20. Такой же ответ получился при помощи дерева вариантов.

Про второй способ рассуждений обычно говорят так: мы использовали *правило умножения.*

У **494.** 1) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7?

2) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, если известно, что цифры не должны повторяться?

Сравните свое решение с таким решением.

1) Для цифры сотен у нас есть 4 варианта — 1, 3, 5 или 7; для цифры десятков мы должны использовать те же 4 варианта; для цифры единиц — опять 4 варианта. Применив правило умножения, получим $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Ответ: 64 числа.

2) Для цифры сотен у нас есть 4 варианта — 1, 3, 5 или 7; для цифры десятков мы можем использовать для каждой выбранной цифры сотен лишь 3 варианта, поскольку повторять цифру сотен мы не имеем права (по условию задачи все цифры должны быть различными). Для цифры единиц у нас в каждом случае есть лишь две оставшиеся возможности — 2 варианта. Применив правило умножения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Ответ: 24 числа.

495. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов — белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг? Верно ли, что одной из этих стран является Россия?

496. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде четырех вертикальных полос одинаковой ширины разных цветов — желтого, синего, красного, зеленого. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

497. Руководство некоторой страны решило сделать свой государственный флаг таким: на одноцветном прямоугольном полотне в одном из углов помещается квадратик другого цвета. Цвета решено выбрать

из трех возможных: красного, белого, зеленого. Сколько вариантов такого флага существует? На рисунке 85 представлены некоторые из возможных вариантов.

Рис. 85

498. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать: а) при условии, что пару дежурных обязательно должны составить мальчик и девочка; б) без указанного условия?

499. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить группу из трех человек для посещения заболевшего ученика этого класса. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) все члены этой группы — девочки;
б) все члены этой группы — мальчики;
в) в группе 1 девочка и 2 мальчика;
г) в группе 2 девочки и 1 мальчик?

500. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить группу из трех человек для посещения заболевшей ученицы этого класса. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) все члены группы — девочки;
б) все члены группы — мальчики;
в) в группе 1 девочка и 2 мальчика;
г) в группе 2 девочки и 1 мальчик?

501. а) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?
б) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

502. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5?
б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

503. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 7, 9?
б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 7, 9 при условии, что цифры не должны повторяться?

504. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 6, 9?
б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 6, 9 при условии, что цифры не должны повторяться?

505. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6 при условии, что цифры не должны повторяться?

506. В 6 «А» классе в четверг 5 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, физкультура. Сколько всего можно составить вариантов расписания на четверг? Сколько имеется вариантов расписания при условии, что физкультура — последний урок? Сколько имеется вариантов расписания при условии, что физкультура — последний урок, а математика — первый?

507. В 6 «А» классе в пятницу 6 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, история, физкультура. Сколько всего можно составить вариантов расписания на пятницу? Сколько времени потратит завуч на запись всех вариантов, если известно, что на запись одного варианта у него уходит 30 с?

508. В чемпионате России по футболу в высшей лиге участвуют 16 команд. Перед началом чемпионата газета «Спорт» провела интернет-опрос читателей, задав им два вопроса: 1) Какие три команды станут призерами чемпионата, т. е. займут первое, второе и третье места? 2) Какие две команды по итогам чемпионата должны будут покинуть высшую лигу, т. е. займут два последних места? Читатели в своих ответах указали все возможные варианты и при ответе на первый, и при ответе на второй вопрос.

а) Сколько вариантов состава призеров чемпионата указали участники опроса?

б) Сколько вариантов состава неудачников чемпионата указали участники опроса?

509. В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой — семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимают по одному шару.

а) Сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары одного цвета?

б) Сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары разных цветов?

в) Сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров (комбинации типа «белый — красный» и «красный — белый» считаются одинаковыми)?

510. Группа туристов планирует осуществить поход по маршруту Мамино — Папино — Бабушкино — Дедушкино — Тетино.
Из Мамино в Папино можно сплавиться по реке или дойти пешком. Из Папино в Бабушкино можно пройти пешком или доехать на велосипедах. Из Бабушкино в Дедушкино можно доплыть по реке, доехать на велосипедах или пройти пешком. Из Дедушкино в Тетино можно пройти пешком, доехать на велосипедах или на лошадях. Сколько всего вариантов похода могут выбрать туристы? Сколько вариантов похода могут выбрать туристы при условии, что хотя бы один из участков маршрута они должны пройти пешком?

Решите уравнение:

511. а) $32x = -4$; б) $-9x = -54$; в) $-45x = 15$; г) $19x = -57$.

512. а) $-17y = 68$; б) $48y = -24$; в) $-64y = -8$; г) $-36y = -9$.

513. а) $x : (-3) = 1{,}2$; в) $0{,}6 : (-x) = 8{,}4$;
б) $(-1{,}5) : x = -0{,}3$; г) $-1{,}12 : x = 1{,}4$.

514. а) $(-x) : (-2{,}1) = 0{,}15$; в) $(-0{,}5) : x = -1{,}25$;
б) $0{,}7 : (-x) = 2{,}8$; г) $-1{,}21 : x = 0{,}11$.

515. Выпишите пары равных выражений:
$a - (b + c)$; $a - (b - c)$; $a - (-b + c)$; $a - (-b - c)$;
$a + b + c$; $a + b - c$; $a - b + c$; $a - b - c$.
Обоснуйте свой ответ.

516. Решите уравнение:
а) $210 - x = -210$; г) $210 : x = -3$; ж) $210 + x = 130$;
б) $210 \cdot x = 30$; д) $210 + x = -65$; з) $210 + x = -65$;
в) $210 + x = -90$; е) $210 \cdot x = -10$; и) $210 - x = 350$.

517. Сколько раз:
а) $\frac{4}{5}$ содержится в 15; в) $\frac{3}{7}$ содержится в 16;
б) $\frac{2}{9}$ содержится в 18; г) $\frac{5}{6}$ содержится в 12?

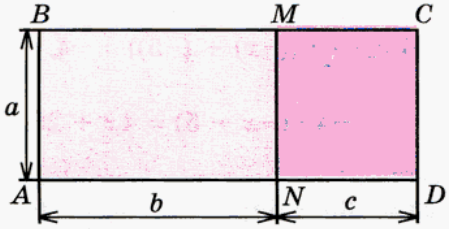
Контрольные задания

Используя правило умножения, вычислите, сколько существует различных трехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, в случае, если:
а) в числе могут быть одинаковые цифры;
б) в числе нет одинаковых цифр.

ГЛАВА II ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 17. РАСКРЫТИЕ СКОБОК

518. 1) Рассмотрите рисунок 86. Опишите с его помощью два способа вычисления площади прямоугольника $ABCD$. Какой закон арифметических действий иллюстрирует этот рисунок?



$$S = a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Рис. 86

2) Раскройте скобки:

а) $4 \cdot (x + 5)$; б) $(-4) \cdot (x + 5)$.

Проверьте себя.

Равенство $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — это распределительный закон умножения.

Рисунок подтверждает этот закон для случая, когда a, b и c — положительные числа. На самом деле распределительный закон выполняется для любых чисел, поэтому:

а) $4 \cdot (x + 5) = 4 \cdot x + 4 \cdot 5 = 4x + 20$;

б) $(-4) \cdot (x + 5) = (-4) \cdot x + (-4) \cdot 5 = -4x + (-20) = -4x - 20$.

Обычно записывают короче:

$$4 \cdot (x + 5) = 4x + 20 \quad \text{и} \quad (-4) \cdot (x + 5) = -4x - 20.$$

519. Раскройте скобки:

а) $(-5) \cdot (x + y + 7)$; в) $-3(c + 8 + d)$;

б) $-2 \cdot (7 + a + b)$; г) $(-5)(7 + x + y)$.

520. Подумайте, как, применяя распределительный закон, раскрыть скобки в таких случаях:

1) $(-4) \cdot (x - 5)$; 2) $4 \cdot (-x - 5)$; 3) $-4 \cdot (-x - 5)$.

Подсказка.
Выражения в скобках удобно представить в виде суммы.

Проверьте себя.

1) $(-4) \cdot (x - 5) = (-4) \cdot (x + (-5)) = (-4) \cdot x + (-4) \cdot (-5) = -4x + (+20) = -4x + 20$, т. е.

$$\mathbf{(-4) \cdot (x - 5) = -4x + 20;}$$

2) $4 \cdot (-x - 5) = 4 \cdot ((-x) + (-5)) = 4 \cdot (-x) + 4 \cdot (-5) = -4x - 20$, т. е.

$$\mathbf{4 \cdot (-x - 5) = -4x - 20;}$$

3) $-4 \cdot (-x - 5) = -4 \cdot ((-x) + (-5)) = -4 \cdot (-x) + (-4) \cdot (-5) = 4x + 20$, т. е.

$$\mathbf{-4 \cdot (-x - 5) = 4x + 20.}$$

Проверьте равенство:

521. а) $5 \cdot (-7 - a) = -35 - 5a$; в) $5 \cdot (-7 + a) = -35 + 5a$;
б) $-5 \cdot (7 - a) = -35 + 5a$; г) $-5 \cdot (-7 - a) = 35 + 5a$.

522. а) $(-2) \cdot (x + y) = -2x - 2y$; в) $-2 \cdot (-x + y) = 2x - 2y$;
б) $(-2) \cdot (-x - y) = 2x + 2y$; г) $-2 \cdot (x - y) = -2x + 2y$.

Определите, является ли равенство верным. В неверных равенствах исправьте правую часть так, чтобы они стали верными:

523. а) $15(2 + b) = 30 + 15b$; в) $15(2 - b) = 30 - 15b$;
б) $-15(2 + b) = -30 + 15b$; г) $-15(2 - b) = -30 - 15b$.

524. а) $-15(2 - b) = -30 + 15b$; в) $-15(2 + b) = -30 + b$;
б) $-15(2 + b) = -30 - 15b$; г) $-15(-2 - b) = -30 - b$.

Назовите слагаемые данного выражения, раскройте скобки и упростите:

525. а) $2(3 + a) - 10$; в) $20 + 15(x - 2)$; д) $-3(y - 2) - 4$;
б) $-9(4 + y) + 36$; г) $-12 - 7(a + 1)$; е) $28 + 4(y - 9)$.

526. а) $15 + 4(x - 5)$; в) $-45 - 3(9 - y)$; д) $-35 - 5(x + 8)$;
б) $8 - 5(b + 3)$; г) $-6(8 - b) + 50$; е) $2(3 - a) - 16$.

527. Подумайте, как раскрыть скобки в таких выражениях:

$(x - 3) + 2$; $-15 + (-6 + y)$;
$-(x - 3) + 2$; $-15 - (-6 + y)$.

Проверьте себя.

До сих пор мы рассматривали выражения, в которых перед скобками стоял какой-либо числовой множитель. На первый взгляд может показаться, что в этих выражениях перед скобками множителя нет. Но на самом деле вам известны такие равенства:

$$a = +a = 1 \cdot a, \qquad -a = (-1) \cdot a.$$

Поэтому, если перед скобками стоит знак +, это значит, что выражение в скобках умножается на 1:

$$(x - 3) + 2 = 1 \cdot (x - 3) + 2 = x - 3 + 2 = x - 1;$$
$$-15 + 1 \cdot (-6 + y) = -15 - 6 + y = -21 + y = y - 21.$$

Если же перед скобками стоит знак −, это значит, что выражение в скобках умножается на (−1):

$$-(x - 3) + 2 = (-1) \cdot (x - 3) + 2 = -x + 3 + 2 = -x + 5 = 5 - x;$$
$$-15 - (-6 + y) = -15 + (-1) \cdot (-6 + y) = -15 + 6 - y = -9 - y.$$

Итак, мы получили:

$$(x - 3) + 2 = x - 3 + 2, \qquad -(x - 3) + 2 = -x + 3 + 2,$$
$$-15 + (-6 + y) = -15 - 6 + y, \qquad -15 - (-6 + y) = -15 + 6 - y.$$

Анализируя эти равенства, можно сформулировать следующие правила раскрытия скобок:

если перед скобками стоит знак +, это значит, что все слагаемые в скобках надо умножить на 1, т. е., раскрывая скобки, оставить их без изменения;

если перед скобками стоит знак −, это значит, что все слагаемые в скобках надо умножить на −1, т. е., раскрывая скобки, изменить знаки слагаемых на противоположные.

Укажите выражения (№ 528—531), в которых при раскрытии скобок знаки слагаемых, стоящих в скобках, изменятся на противоположные.

Раскройте скобки:

528. а) $16 - (x + y)$; в) $-(6 - m + n) - k$;
б) $x + (y + 9 - t)$; г) $7 + (-g + h - f)$.

529. а) $-(a + 5) - c$; в) $d + (a - 17 + b)$;
б) $-15 + (-a - b + c)$; г) $-(-q - v - s) - 21$.

Раскройте скобки и упростите выражение:

530. а) $(18 + x) + 12$; в) $(25 - z) + (t - 18)$;
б) $25 - (a - b + 28)$; г) $-(p + 3) + (q - 7)$.

531. а) $36 - (18 + y)$; в) $(17 + u) - (v - 7)$;
б) $43 + (c - 21 + d)$; г) $-(9 - g) - (15 + h)$.

Решите уравнение:

532. а) $(-15) \cdot 4x = 3 \cdot 16 \cdot 5$; в) $-24 \cdot (-3x) = 18 \cdot (-12)$;
б) $-9x \cdot 8 = 36 \cdot (-2)$; г) $(-1) \cdot (-x) \cdot 28 = 14 \cdot (-16)$.

533. а) $10 \cdot 8x = 2 \cdot (-16) \cdot 5$; в) $-15 \cdot (-13x) = -26 \cdot (-30)$;
б) $18 \cdot (-x) \cdot (-5) = 45 \cdot (-3)$; г) $-36 \cdot 7x = 4 \cdot (-63)$.

534. а) $0{,}5 \cdot (-2) \cdot x = 17$; в) $7{,}2 \cdot (-x) = 0{,}9 \cdot (-16)$;
б) $-8 \cdot 0{,}25 \cdot x = -3{,}2$; г) $-x \cdot 0{,}32 = 4 \cdot 32$.

535. а) $-5x \cdot (-0{,}4) = 0{,}84 : (-0{,}42)$; в) $5{,}4 \cdot (-x) = 0{,}6 \cdot (-36)$;
б) $(-1) \cdot 0{,}7 \cdot (-x) = (-35) : 0{,}5$; г) $-x \cdot 0{,}25 = -15 \cdot 25$.

536. Заполните таблицу, если $y = -3 + x$:

x	−5	−3	−1	0	2	3	6
y							

Отметьте на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, взятыми из полученной таблицы. Что вы заметили?

537. Заполните таблицу, если $y = -x + 7$:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y							

Отметьте на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, взятыми из полученной таблицы. Отметьте точки, симметричные этим точкам относительно оси ординат. Как проверить, правильно ли выполнено задание?

Вычислите:

538. а) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6}$; б) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$; в) $\frac{7}{12} \cdot \left(-\frac{4}{21}\right)$; г) $-\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{4}{25}\right)$.

539. а) $\frac{2}{5} : \frac{7}{11}$; б) $-\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$; в) $\frac{3}{5} : \left(-\frac{12}{15}\right)$; г) $-\frac{3}{11} : \left(-\frac{6}{11}\right)$.

Найдите значение выражения:

540. а) $2\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{4}$; б) $4\frac{11}{48} \cdot \frac{6}{7} - 1\frac{4}{9}$.

541. а) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 : 1\frac{1}{9}$; б) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{11}{12}\right) \cdot 5\frac{1}{3}$.

542. а) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 3\frac{1}{6}$; б) $15\frac{4}{7} - 4\frac{3}{8} \cdot \left(1\frac{3}{7} - \frac{34}{35}\right)$.

Вычислите:

543. а) $-15{,}28 - (-34{,}96) - (+24{,}15) - (-4{,}51) + (-81{,}05)$;
б) $-(+80{,}61) - 23{,}49 + (+64{,}045) - (-55{,}955) - (+96{,}51)$;
в) $74{,}62 - 58{,}025 + (-34{,}31) - (-56{,}78) - (+39{,}065)$;
г) $-(-49{,}96) + 54{,}28 - (+28{,}168) - 34{,}971 + (-42{,}101)$.

544. а) $(-0{,}01) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}05)$;
б) $-(-0{,}2) \cdot (-0{,}008) \cdot (-0{,}01) \cdot (-100)$;
в) $0{,}001 \cdot (-(-1)) \cdot 1000 \cdot (-0{,}04)$;
г) $(-0{,}07) \cdot (-0{,}02) \cdot (-0{,}08) \cdot (-0{,}025) \cdot (-10)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Как раскрыть скобки, перед которыми стоит:
   а) знак +; б) знак –?
2. Запишите без скобок выражение $-(5 - 9) + (-3)(x + 5)$.

§ 18. УПРОЩЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

545. 1) Назовите коэффициенты в выражениях $2x$, $-15y$, $18z$, $-9t$, a, $-b$.

2) Назовите коэффициенты слагаемых и упростите выражение $3x - 8x$.

Проверьте себя.

1)

Выражение	$2x$	$-15y$	$18z$	$-9t$	a	$-b$
Коэффициент	2	–15	18	–9	1	–1

2) Коэффициенты слагаемых: 3 и −8. Выражение $3x - 8x$ можно упростить, применяя распределительный закон:

$$3x - 8x = (3 - 8)x = -5x.$$

Обычно записывают короче:

$$\mathbf{3x - 8x = -5x.}$$

Слагаемые $\mathbf{3x}$ и $\mathbf{-8x}$ отличаются только своими коэффициентами — такие слагаемые называют **подобными**. Кроме того, подобными считают и равные слагаемые, а также числа.

Заметим, что слагаемые, у которых равны коэффициенты, а буквенные множители различны, подобными не являются, хотя и к ним иногда полезно применять распределительный закон; например, $7a + 7b = 7(a + b)$.

Назовите коэффициенты и упростите выражение:

546. а) $-3x + x$; в) $8 - c + 15c$;
б) $2a + 5 - 7a$; г) $18 + m - 4m$.

547. а) $y - 5y$; б) $-b - 4 - 6b$; в) $-10d + d - 25$; г) $9 - n - 7n$.

Упрощая данные выражения, вы находили суммы подобных слагаемых. Такое действие называют *приведением подобных слагаемых*.

Приведите подобные слагаемые:

548. а) $2{,}38x - 5{,}6x + 2{,}17x$; в) $-7{,}2x - 3{,}4x + 9{,}6x$;
б) $-0{,}28x + 2{,}7x - 3{,}401x$; г) $-6{,}3x + 2{,}8x - 19{,}2x$.

549. а) $\frac{2}{15}x - \frac{3}{15}x$; б) $-\frac{3}{11}x - \frac{8}{11}x$; в) $\frac{9}{17}x - \frac{6}{17}x$; г) $-\frac{7}{25}x + \frac{8}{25}x$.

550. а) $\frac{3}{5}x + \frac{2}{15}x$; б) $-\frac{3}{5}x - \frac{2}{15}x$; в) $-\frac{3}{5}x + \frac{2}{15}x$; г) $\frac{3}{5}x - \frac{2}{15}x$.

551. а) $\frac{5}{12}a + \frac{3}{4}a$; б) $-\frac{5}{12}a + \frac{3}{4}a$; в) $-\frac{5}{12}a - \frac{3}{4}a$; г) $\frac{5}{12}a - \frac{3}{4}a$.

552. а) $\frac{7}{8}y + \frac{1}{2}y$; б) $\frac{7}{8}y - \frac{1}{2}y$; в) $-\frac{7}{8}y + \frac{1}{2}y$; г) $-\frac{7}{8}y - \frac{1}{2}y$.

553. а) $\frac{2}{3}b + \frac{19}{21}b$; б) $-\frac{2}{3}b - \frac{19}{21}b$; в) $-\frac{2}{3}b + \frac{19}{21}b$; г) $\frac{2}{3}b - \frac{19}{21}b$.

554. а) $17x + x - 45x - 24x$; в) $-89x - x + 41x + 128x$;
б) $-25x + 34x - x + 39x$; г) $-58x - 162x - 29x + x$.

Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

555. а) $5a + 2(7 - a)$; в) $5a - 2(7 - a)$;
б) $-5a - 2(7 - a)$; г) $-5a + 2(7 - a)$.

556. а) $2(7 - a) - 5a$; в) $-2(7 - a) + 5a$;
б) $-2(7 - a) - 5a$; г) $-5a + 2(7 - a)$.

Упростите выражение:

557. а) $2x + 3(4 - 5x)$; в) $-5a + 8(1 + 3a)$;
б) $5(9 - 2m) + 10m$; г) $-9c - 7(1 - 2c)$.

558. а) $7y - 2(3y + 8)$; в) $3b - 6(2 - 4b)$;
б) $-4(8n - 7) - 28n$; г) $5(2d - 1) - 6d$.

559. а) $4(2 - 3x) + 5(2x - 3)$; в) $-2(6 - 9x) - (x + 3)$;
б) $3(5x - 9) - 2(5x + 1)$; г) $-6(3 + x) + 8(2 - x)$.

560. а) $7(4x + 2) - 8(5 - 3x)$; в) $-(-2x + 7) - 3(x - 1)$;
б) $-6(8x - 5) + 7(4 - x)$; г) $4(2 - 5x) - 5(3 - 4x)$.

561. а) $6(5a + 3) - (7 + a) - 2(4 - 3a)$;
б) $-7(4 - b) + 3(-2b - 2) - 5(-8 + b)$;
в) $2(12a - 1) - 6(2 - 3a) - 3(8a + 5)$;
г) $-5(4b + 3) - (18 + b) + 15(1 + 2b)$.

562. а) $2(3 - 6c) - 9(2 + 3c) + 3(13c - 4)$;
б) $-4(2d + 5) + 7(2 + 5d) - (d - 6)$;
в) $16(c - 3) + 8(5 - 2c) - (10c - 8)$;
г) $-12(7 - 2d) - 9(7d - 5) - 3(15 + 8d)$.

Решите уравнение:

563. а) $3x - 5x = -13 + 3$; в) $-5y - 17y = -50 + 6$;
б) $-7x + 12x = 8 - 23$; г) $16x - 7x = -42 - 39$.

564. а) $y - 12y = -6 - 27$; в) $-x + 6x = -45 + 15$;
б) $-22y - 18y = 5 \cdot (-2)$; г) $-27y - 33y = -12 \cdot (-5)$.

565. Ручка стоит x р., а карандаш — y р.

1) Что означают выражения: $2x$, $3y$, $x + y$, $x - y$, $x : y$, $2x + 3y$?

2) Что означают равенства: $2x + 3y = 26$, $2x - 3y = 2$?

566. Света купила 5 карандашей по цене x р. за карандаш, а Таня — 7 ручек по цене в 1,8 раза выше, чем цена за карандаш. После этого у Светы осталось 49,2 р., а у Тани — 15 р.

Запишите выражения для следующих величин:

- цены ручки;
- стоимости пяти карандашей;
- стоимости семи ручек;
- суммы денег, которая была у Светы первоначально;
- суммы денег, которая была у Тани первоначально.

Составьте уравнение, зная, что у Светы и Тани первоначально денег было поровну.

567. $y = -x - 1$. Заполните таблицу:

x	−8	−5	−1	0	2	5	8
y							

Отметьте на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, взятыми из полученной таблицы. Отметьте точки, симметричные данным относительно оси абсцисс.

568. $y = -10 - x$. Заполните таблицу:

x	−12	−7	−2	0	1	2	3
y							

Отметьте на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, взятыми из полученной таблицы. Отметьте точки, симметричные данным относительно начала координат.

Найдите значение выражения:

569. а) $\frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{5}{6}$; б) $\frac{5}{9} + 3 : \frac{1}{2}$; в) $-\frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} - 5$.

570. а) $\frac{6}{11} : \left(-\frac{12}{33}\right) + \frac{7}{10}$; в) $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{17}$; д) $\frac{3}{25} : \frac{6}{35} - 3$;

б) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{15}{24}\right)$; г) $3 + \frac{7}{8} : \left(-\frac{3}{4}\right)$; е) $\frac{14}{15} \cdot \frac{10}{21} - 2$.

571. а) $-\frac{3}{7}\cdot 14-\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{8}-4:\frac{2}{3}$; в) $18\cdot\frac{5}{54}-\frac{5}{9}$.

572. а) $\left(1\frac{1}{4}+1\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\right):1\frac{1}{6}$; в) $\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-2:2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}$;

б) $2\frac{4}{15}-4\frac{1}{5}\cdot\left(1\frac{5}{6}-\frac{41}{42}\right)$; г) $\left(3\frac{1}{2}:4\frac{2}{3}+4\frac{2}{3}:3\frac{1}{2}\right)\cdot 4\frac{4}{5}$.

573. Свежий виноград содержит 90% воды, а изюм — 55%. Сколько изюма получится из 13,5 кг винограда? Сколько винограда надо взять, чтобы получить 10 кг изюма?

574. Молоко содержит 21% сливок (по массе), а сливки содержат 23% масла (по массе). Сколько масла можно получить из 50 кг молока? Сколько молока необходимо для получения 5 кг масла?

575. На столе лежал расколотый арбуз массой 10 кг, содержащий 99% воды. Через некоторое время часть воды испарилась и ее процентное содержание в арбузе понизилось до 96%. Найдите новую массу арбуза.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие слагаемые называются подобными? На основании какого арифметического закона приводятся подобные слагаемые?
2. Упростите выражение $5(2x-y)-3(3x-2y)$.

§ 19. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Цена конфет — 98 р. за 1 кг.

Скорость автомобиля — 98 км/ч.

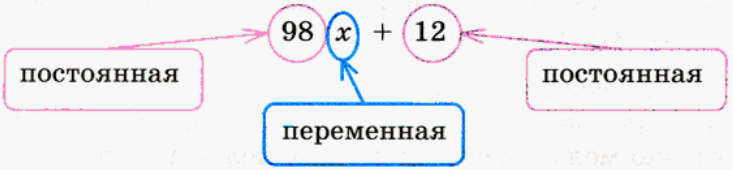
Производительность станка — 98 деталей в час.

Рассмотрим, что может означать выражение $98x$ для каждой из данных выше ситуаций:

- в первом случае оно означает стоимость x кг конфет;
- во втором — путь, пройденный за x часов;
- в третьем — количество деталей, изготовленных станком за x часов.

В выражении $98x$ два множителя — число 98 и буква x. Значение выражения $98x$ зависит от того, какое значение принимает величина, обозначенная буквой x. Изменяя значение x, можно получать различные значения выражения $98x$.

В этом и в других буквенных выражениях значения букв можно изменять, поэтому величины, обозначенные буквами, называют *переменными величинами* или просто *переменными*. В отличие от них величины, значения которых не меняются (постоянны), называют *постоянными величинами* или просто *постоянными*.



Термины «постоянная» и «переменная» в математике перестают быть именами прилагательными, становятся именами существительными и отвечают на вопрос «что?». Здесь имеет место такое довольно распространенное явление, как переход слова из одной части речи в другую.

576. (Устно.) В данном выражении назовите постоянные и переменные величины:

а) $7a + 8b$; б) $34 - 5y$; в) $7t + 15$; г) $9{,}8x - y$.

577. (Устно.) В данном равенстве назовите постоянные и переменные величины:

а) $8a + 1 = b$; в) $4t = 12 - 5t$;
б) $3{,}2 - 7y = 76$; г) $54x - 2y = 35$.

У **578.** 1) Решите уравнение $3x = 12$.
2) Подумайте, как решить такие уравнения:
а) $3x - 12 = 0$; б) $3x - 2 = 10$; в) $2x - 2 = 10 - x$.

Подсказка.

Решить уравнение, левая часть которого представляет собой произведение числа (коэффициента) и переменной, а правая — некоторое число, вы можете без затруднений. Для этого надо число, стоящее в правой части уравнения, разделить на коэффициент при переменной:

$$3x = 12, \quad x = 12 : 3, \quad x = 4.$$

Фактически мы *разделили на коэффициент при переменной обе части уравнения.*

Чтобы решить уравнения второй части задания, надо преобразовать их так, чтобы в каждом случае получить уравнение, левая часть которого — произведение коэффициента и переменной, а правая — число.

Проверьте себя.

Рассуждать можно по-разному, например так:

а) $3x - 12 = 0$.

Разность двух выражений равна нулю, значит, сами выражения равны:

$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

б) $3x - 2 = 10$.

Здесь мы имеем равенство двух выражений, значит, их разность равна нулю:

$$(3x - 2) - 10 = 0.$$

Раскроем скобки и упростим выражение в левой части уравнения:

$$3x - 2 - 10 = 0,$$
$$3x - 12 = 0,$$
$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

в) $2x - 2 = 10 - x$.

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем:

$$(2x - 2) - (10 - x) = 0,$$
$$2x - 2 - 10 + x = 0,$$
$$3x - 12 = 0,$$
$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

Нетрудно заметить, что решить уравнение можно, последовательно выполняя следующие действия:

1) перенести все слагаемые из правой части уравнения в левую часть, меняя при переносе знаки на противоположные;

2) привести подобные слагаемые;

3) слагаемое, не содержащее переменную, перенести в правую часть уравнения, поменяв его знак на противоположный;

4) разделить правую часть уравнения на коэффициент при переменной.

Другой способ решения уравнений связан с возможностью прибавлять к обеим частям равенства одно и то же число и умножать или делить обе его части на одно и то же число (кроме 0).

Рассмотрим еще раз три наших уравнения.

а) $3x - 12 = 0$. Какое число нужно прибавить к левой части, чтобы там осталось только $3x$? Очевидно, что это 12. Но, чтобы равенство осталось верным, надо прибавить число 12 к обеим частям уравнения:

$$3x - 12 + 12 = 0 + 12.$$

Получаем

$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

б) $3x - 2 = 10$. Рассуждаем так же, как в предыдущем случае:

$$3x - 2 + 2 = 10 + 2.$$

В левой части уравнения есть слагаемые, сумма которых равна нулю:

$$-2 + 2 = 0.$$

Говорят, что *слагаемые взаимно уничтожились*.

$$3x = 10 + 2,$$
$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

в) $2x - 2 = 10 - x$. Здесь нам «мешают» в левой части -2, а в правой $-x$. Поэтому к обеим частям уравнения прибавим величины, им противоположные:

$$2x - 2 + 2 + x = 10 - x + 2 + x.$$

Так же как и в предыдущем случае, *взаимно уничтожатся* слагаемые, дающие в сумме нуль. Получаем

$$2x + x = 10 + 2,$$
$$3x = 12,$$
$$x = 4.$$

Запишем теперь решение каждого уравнения без пояснений.

а) $3x - 12 = 0$.

Решение:

$3x - 12 + 12 = 0 + 12$,

$\mathbf{3x = 12}$,

$x = 4$.

Ответ: 4.

б) $3x - 2 = 10$.

Решение:

$3x - 2 + 2 = 10 + 2$,

$\mathbf{3x = 10 + 2}$,

$3x = 12$,

$x = 4$.

Ответ: 4.

в) $2x - 2 = 10 - x$.

Решение:

$2x - 2 + 2 + x = 10 - x + 2 + x$,

$\mathbf{2x + x = 10 + 2}$,

$3x = 12$,

$x = 4$.

Ответ: 4.

В каждом столбце сравните уравнение, выделенное жирным шрифтом, с исходным уравнением. Подумайте, как его можно получить из исходного уравнения без каких-либо промежуточных действий.

Проверьте себя.

Каждое уравнение, выделенное жирным шрифтом, можно получить из исходного, перенеся слагаемые из одной части уравнения в другую с изменением знаков этих слагаемых на противоположные. Поэтому, чтобы решить уравнение, надо последовательно выполнить следующие действия:

1) слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть уравнения, а числа — в его правую часть, не забывая при переносе менять знаки на противоположные;

2) привести подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения;

3) разделить число в правой части уравнения на коэффициент при переменной.

579. Преобразуйте уравнение к виду $ax = b$, где a и b — числа. Решите полученное уравнение и выполните проверку, подставив найденное значение x в исходное уравнение:

а) $5x - 2 = 18$; в) $3x + 5 = x + 9$;

б) $7x = x + 24$; г) $2x - 4 = 6x - 20$.

Решите уравнение:

580. а) $4x - 7 = 2x + 15$; в) $33 - 5x = 15 - 8x$;

б) $7x + 12 = 10x - 3$; г) $-24 + 3x = 9x + 18$.

581. а) $-15x + 31 = -7 + 4x$; в) $28 - 4x = 19 - x$;

б) $11 - x = 55 + x$; г) $-35 - 2x = 42 + 9x$.

582. а) $7(2 + y) - 3y = 5y - 6$; в) $17 + 3(15 - c) = (4 - c) - 2(c - 5)$;

б) $4x - 2(3 + x) = 9 - x$; г) $-3(5a - 1) + 4a = 2a + 7(5 - 3a)$.

583. а) $2(4 - 9d) - (2d + 3) = -8(4 - d) + 3(1 + 2d)$;
б) $5(2 - 3b) - 4(6 + 2b) = 28 - (b - 2)$;
в) $-2(3x + 4) + (6x + 8) = 4(5x - 2) - (5x + 8)$;
г) $8(4 - 3y) - (7 - 2y) = -(6 + 3y) + 8(y - 2)$.

584. а) $1{,}38x + 5{,}744 = 0{,}18x + 5{,}78$;
б) $1{,}11 - 3{,}48x = 6{,}52x - 0{,}89$;
в) $12{,}6 - 6{,}85x = 56{,}4 + 0{,}45x$;
г) $3{,}24x - 1{,}295 = 1{,}705 - 5{,}76x$.

$$ax = b$$
$$x = b : a$$

585. а) $1{,}78x + 0{,}84 = 1{,}34 - 0{,}72x$;
б) $7{,}43 - 1{,}28x = 1{,}42x + 5$;
в) $-4{,}29x + 12{,}7 = 5{,}7 - 0{,}79x$;
г) $-3{,}32x - 0{,}132 = 0{,}138 + 7{,}48x$.

586. Заполните таблицу:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$3x$									
$-2x$									
$5x - 2$									

587. Цена яблок — x р. за кг, а цена груш — y р. за кг.
Запишите в виде выражения:
- сколько стоит 1 кг яблок после снижения цены на 4 р.;
- сколько стоит 1 кг груш после повышения цены на 3 р.;
- стоимость 6 кг яблок по новой цене;
- стоимость 4 кг груш по новой цене.

Составьте математические модели следующих ситуаций (используя новые цены яблок и груш):
а) 6 кг яблок стоят столько же, сколько 4 кг груш;
б) 6 кг яблок дороже 4 кг груш на 3,8 р.;
в) 6 кг яблок дешевле 4 кг груш в 1,2 раза.

588. В выборах на пост главы администрации города приняли участие 60% избирателей. Кандидат А набрал 75% голосов избирателей, принявших участие в выборах.
Подумайте, что принято за 100% в первом случае и что — во втором. Можно ли утверждать, что больше половины избирателей города отдали свои голоса за кандидата А?

Сколько человек проголосовали за кандидата А, если всего в городе 80 000 избирателей?

Подумайте, что в следующей задаче принято за 100%.

589. 1) В магазине батон хлеба стоит 6,7 р., а на лотке цена такого же батона 6 р. На сколько процентов дешевле продается батон с лотка, чем в магазине?

2) Определите, на сколько процентов батон хлеба в магазине дороже, чем на лотке.

Проверьте себя.

1) По условию задачи цена «дешевого» батона сравнивается с ценой «дорогого».

В таких случаях всегда за 100% принимается то, с чем сравнивают.

6,7 р. — 100%, 1% — 0,067 р. Тогда на сумму 6 р. приходится примерно 89,5%:

$$6 : 0{,}067 \approx 89{,}5; \quad 100\% - 89{,}5\% = 10{,}5\%.$$

Значит, на лотке батон на 10,5% дешевле, чем в магазине.

2) На этот раз «дорогой» батон сравнивается с «дешевым». Значит, за 100% принимаем стоимость «дешевого» батона. 6 р. — 100%, 1% — 0,06 р. Тогда на 6,7 р. приходится примерно 111,6%:

$$6{,}7 : 0{,}06 \approx 111{,}6; \quad 111{,}6\% - 100\% = 11{,}6\%.$$

Таким образом, в магазине батон на 11,6% дороже, чем на лотке.

590. В 2000 г. проезд на автобусе в Москве стоил 4 р., а в Подольске — 3 р. На сколько процентов проезд на автобусе в Москве был дороже, чем в Подольске? На сколько процентов проезд на автобусе в Подольске был дешевле, чем в Москве?

591. В результате дефолта (так называется экономический кризис, который случился в России в 1998 г.) цены на импортные товары выросли примерно в 5 раз. До дефолта кроссовки стоили 200 р. На сколько процентов новая цена кроссовок выше старой? На сколько процентов старая цена кроссовок ниже новой? Закончите предложение: «В результате дефолта цены в среднем выросли на ... %».

592. Численность населения города N на 20% превышает численность населения города M. На сколько процентов число жителей города M меньше числа жителей города N?

Контрольные вопросы и задания

1. Решите уравнение $4x + 7 = -28 - x$.
2. Найдите корень уравнения $2(3 - 4x) - 5 = 6 - 7(x + 8)$.

§ 20. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

593. В одном бидоне x л, а в другом — y л молока.

а) Что означают выражения $x + y$, $x - y$, $x + 3$, $y - 2$?

б) Что означают равенства $x + y = 90$, $x + 5 = y$, $x = y - 3$?

У **594.** В одном бидоне молока в 3 раза больше, чем в другом. Когда из одного бидона перелили в другой 5 л, молока в бидонах стало поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Решите задачу алгебраическим способом. Оформите решение так, чтобы было понятно, как получилось уравнение.

Проверьте себя.

Пусть x л — количество молока, которое было до переливания во втором бидоне. Тогда в первом бидоне его было $3x$ л.

После переливания в первом бидоне осталось $(3x - 5)$ л молока, а во втором стало $(x + 5)$ л.

Поскольку после переливания в обоих бидонах молока стало поровну, можно составить уравнение

$$3x - 5 = x + 5.$$

Эту часть рассуждений при решении задачи называют *составлением математической модели*. На этом этапе переводят текст задачи с обыденного языка на математический язык. В результате получают математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Такой математической моделью и является составленное уравнение. После этого приступают ко второму этапу, который называют *работой с математической моделью*. На этом этапе нам надо решить составленное уравнение $3x - 5 = x + 5$.

Решение:

$$3x - x = 5 + 5,$$
$$2x = 10,$$
$$x = 5.$$

Уравнение решено, теперь надо приступить к третьему этапу — ответу на вопрос задачи. Мы получили $x = 5$, а за x было принято количество молока (в литрах), которое было во втором бидоне. Итак, во втором бидоне было 5 л молока. По условию задачи в первом бидоне молока было в 3 раза больше, значит, в первом бидоне было 15 л молока.

Ответ: в одном бидоне было 5 л, а в другом — 15 л молока.

Можно записать решение короче.

	I бидон	II бидон
Было	$3x$ (л)	x (л)
Стало	$3x - 5$ (л)	$x + 5$ (л)

Молока в бидонах стало поровну, значит,

$$3x - 5 = x + 5,$$
$$3x - x = 5 + 5,$$
$$2x = 10,$$
$$x = 5.$$

$3 \cdot 5 = 15$ (л) — количество молока в первом бидоне.

Ответ: 15 л, 5 л.

Решите задачу, выделив три этапа математического моделирования:

1) составление математической модели (составление уравнения по условию задачи);

2) работа с математической моделью (решение уравнения);

3) ответ на вопрос задачи.

595. На одной автостоянке было в 4 раза меньше машин, чем на другой. Когда со второй стоянки на первую перевели 12 автомобилей, машин на стоянках стало поровну. Сколько машин было на каждой стоянке первоначально?

596. Одна скважина на 3,4 м глубже другой. Если глубину первой скважины увеличить на 21,6 м, а второй — в 3 раза, то обе скважины будут иметь одинаковую глубину. Найдите глубину каждой скважины.

Решите задачу:

597. У двух братьев поровну орехов. Если старший брат отдаст младшему 10 орехов, то орехов у него станет в 5 раз меньше, чем у младшего. Сколько орехов у каждого брата?

598. В одной пачке в 4 раза больше тетрадей, чем в другой. Когда из первой пачки взяли 7 тетрадей, а во вторую положили 17, тетрадей в пачках стало поровну. Сколько тетрадей было в обеих пачках первоначально?

599. Автобус и грузовая машина, скорость которой на 15 км/ч больше скорости автобуса, выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 455 км. Найдите скорости автобуса и грузовика, если известно, что они встретились через 2,6 часа после выезда.

600. Расстояние между пунктами A и B автомобиль проехал за 1,2 часа, а автобус за 2,1 часа. Найдите скорость каждой машины, если автомобиль двигался на 30 км/ч быстрее, чем автобус.

601. Маша, Юля, Лена и Таня варили варенье из абрикосов. У Лены варенья получилось на 0,2 кг больше, чем у Тани, а у Юли и Маши поровну, но в 2 раза больше, чем у Лены, и на 1,8 кг больше, чем у Тани. Сколько варенья получилось у каждой девочки?

602. В классной комнате стоят парты. Если за каждую парту посадить по одному ученику, то семи ученикам не хватит места, а если посадить по 2 ученика, то 5 парт останутся свободными. Определите число парт и число учеников в классе.

603. В пакете лежат конфеты. Если раздать их детям по 5 конфет каждому, то двоим конфет не достанется, а если раздать по 4 конфеты, то в пакете останется еще 17 конфет. Сколько конфет в пакете?

Найдите значение y по данному значению x, заполните таблицу и отметьте точки с координатами $(x; y)$ на координатной плоскости:

604. $y = -4x + 3$.

x	−5	−3	−1	0	1	3	5
y							

605. $y = 8 + 3x$.

x	−15	−10	−5	0	5	10	15
y							

606. $y = -6x - 1$.

x	−9	−6	−3	0	3	6	9
y							

Решите уравнение:

607. а) $3(x - 7) - (9 - 2x) = 2(12 - x) - (x - 10)$;
б) $4(2 - 3x) - 2(9x - 8) = 15(1 - x) + 3(4 - x)$;
в) $7(3 - x) - 3(x - 4) = 5(3 + 2x) - 2(-3 - 2x)$;
г) $4(x - 16) - (8 - x) = 10(x + 1) - 2(15 + 8x)$.

608. а) $4(0{,}6x - 0{,}3) - 3(0{,}7x - 0{,}1) = 0$;
б) $5(0{,}14 - 0{,}23x) + 3(0{,}3x + 0{,}1) = 0$;
в) $0{,}6(x - 1) - (x + 1) = 0$;
г) $5(0{,}16x + 0{,}33) - (3 - x) = 0$.

609. а) Для организации коммерческой деятельности предприниматель взял ссуду в банке под 10% в месяц в размере 60 тыс. р. и приобрел на эти деньги по оптовой цене товар. Товар был распродан в течение месяца по розничной цене.

- Какую выручку получил предприниматель после реализации товара, если розничная цена выше оптовой на 60%?
- Найдите доход предпринимателя, если расходы на реализацию товара (аренда помещения, транспорт и т. д.) составляют 10% от выручки.
- Какую сумму предприниматель заплатит в Пенсионный фонд, если отчисления в этот фонд с предпринимательского дохода (ПД) составляют 5% (ПД = выручка − все расходы)?
- Найдите сумму чистой прибыли предпринимателя.
- Смог бы предприниматель расплатиться с банком, если бы ему за месяц удалось продать только половину приобретенного товара?
- На какую сумму предпринимателю необходимо продать товар, чтобы расплатиться с банком (не забудьте о расходах на реализацию)?

б) Банки принимают денежные вклады от населения на различных условиях. Например, один банк начисляет 0,16% ежемесячно с суммы предыдущего месяца (если сумма первоначального вклада составляла 1000 р., то через месяц она будет равна

$$1000 + 0{,}0016 \cdot 1000 = 1001{,}6,$$

еще через месяц: $1001{,}6 + 0{,}0016 \cdot 1001{,}6 = 1003{,}20$ и т. д.).

Другой банк начисляет 2% годовых. На каком из вкладов через год окажется больше денег, если первоначальные вклады были одинаковыми?

Вычислите:

610. а) $\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot 3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot 4;$

б) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) : \frac{5}{6} - 12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right);$

в) $-\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{10}{21};$

г) $\left(\frac{5}{8} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{15}{16}\right) - \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{6}\right) : \frac{7}{8}.$

611. Решите уравнение:

а) $\frac{x+8}{2} + \frac{3-2x}{5} = 3;$

б) $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-4}{3} = -1;$

в) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+2}{3} = 1;$

г) $\frac{4x-3}{4} + \frac{1-x}{3} = -2.$

Контрольные задания

1. Сформулируйте задачу, начало решения которой выглядит так:

	I магазин	II магазин
Было	x	$2x$
Осталось	$x - 7$	$2x - 34$

В первом магазине осталось в 3 раза больше стульев, чем во втором...

2. Закончите решение сформулированной вами задачи.

§ 21. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДРОБИ

Вы уже знаете, что бывают задачи, где математической моделью служит числовое выражение. К их числу относятся задачи на нахождение части целого и целого по его части.
Прочитайте задачи № 612 и 613.

612. В рукописи 50 страниц. За день машинистка перепечатала $\frac{2}{5}$ рукописи.
Сколько страниц перепечатала машинистка?

613. За день машинистка перепечатала 20 страниц, что составило $\frac{2}{5}$ всей рукописи.
Сколько страниц в рукописи?

Ответьте на вопросы:
1) Какая величина принята за целое в первой задаче, какая — во второй?
2) В какой из задач эта величина известна, а в какой нет?
3) В какой из задач требуется найти часть от целого, а в какой целое по его части?
4) Можно ли сказать, что это взаимно обратные задачи? Ответ поясните.

Проверьте себя.
1) В обеих задачах за целое принято число страниц рукописи.
2) В первой задаче целое известно — это 50 страниц, а во второй целое неизвестно.
3) В первой задаче требуется найти часть от целого, а во второй целое по его части.
4) Эти задачи взаимно обратные, так как в их условиях известные и искомые величины меняются местами.

Теперь, когда мы знаем смысл умножения и деления числа на дробь, правила отыскания части от целого и целого по его части могут быть сформулированы так:
1) *чтобы найти часть от целого, надо целое (соответствующее ему число) умножить на дробь, соответствующую этой части;*
2) *чтобы найти целое по его части, надо часть (соответствующее этой части число) разделить на соответствующую ей дробь.*

Соответственно решение таких задач тоже будем записывать по-другому.

Решение (№ 612).
1) Целое: число всех страниц рукописи — известно (50 с.).
Требуется найти часть от целого.

2) $\mathbf{50} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{5}} = \mathbf{20}$ (с.).

Ответ: 20 страниц.

Решение (№ 613).
1) Целое: число всех страниц рукописи — неизвестно.
Требуется найти целое по его части.

2) $\mathbf{20} : \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{2}} = \mathbf{50}$ (с.).

Ответ: 50 страниц.

Прочитайте задачи № 614—623 и ответьте на вопросы:
1) Какая величина принята за целое?
2) Известна ли эта величина?
3) Что требуется найти в задаче: часть от целого или целое по его части?
После этого приступайте к решению данных задач.

614. Длина туристического маршрута — 84 км. В первый день туристы прошли $\frac{2}{7}$ всего пути. Какое расстояние прошли туристы в первый день?

615. Во время ремонта за укладку кафельной плитки было уплачено 265 р., что составило $\frac{5}{9}$ стоимости ремонта кухни. Сколько денег было уплачено за ремонт кухни?

616. В коллекции энтомолога 48 бабочек, что составляет $\frac{4}{11}$ числа насекомых всей коллекции. Сколько насекомых в коллекции энтомолога?

617. Таня готовилась к школьной математической олимпиаде в течение месяца. За это время она решила 135 задач. За первые 10 дней

она решила $\frac{2}{15}$ числа этих задач. Сколько задач решила Таня за первые 10 дней подготовки к олимпиаде?

618. В школе учатся 480 детей, $\frac{3}{5}$ из них — мальчики. Сколько мальчиков и сколько девочек учатся в школе?

619. Сколько стоят два с половиной килограмма орехов, если $\frac{1}{4}$ кг орехов стоит 23 р.?

620. Турист планировал пройти за первые три дня $\frac{3}{5}$ всего маршрута. Тогда ему осталось бы преодолеть 27 км. Какова длина всего маршрута, который планировал пройти турист?

621. В сахарной свекле содержится $\frac{4}{19}$ части (по массе) сахара. Определите, сколько сахара содержится в 570 ц сахарной свеклы.

622. В книге 240 страниц. Коля прочитал 0,8 книги. Сколько страниц прочитал Коля?

623. Во время игры в «Тетрис» Антон набрал 360 000 очков, что составило 0,8 того количества очков, которое набрал Максим. Сколько очков набрал Максим?

Сформулированные правила можно применить и к решению задач с процентами. Говорят, что в этих задачах находят процент от числа или число по его проценту. Целое в таких задачах принимается за 100%, а указанный процент можно заменить соответствующей десятичной или обыкновенной дробью: например, 80% можно заменить десятичной дробью 0,8 или обыкновенной дробью $\frac{4}{5}$.

624. Сколько получится муки из 15,2 т пшеницы, если масса муки составляет 80% массы зерна?

625. Мясо теряет при варке 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить 520 г вареного?

626. Найдите 2 способа решения задачи: «В бочке 300 л бензина. За неделю было израсходовано 40% этого количества. Сколько литров бензина осталось в бочке?»

Измените вопрос задачи так, чтобы она решалась в одно действие.

Измените условие задачи так, чтобы она решалась в одно действие.

627. После того как поезд прошел 70% расстояния между городами, ему осталось пройти еще 255 км. Определите расстояние, которое прошел поезд.

628. Магазин приобрел для продажи 500 кг сахарного песка. В первый день было продано 34% этого количества, а во второй — 60% остатка. Какое количество сахарного песка было продано за два дня?

629. По первой накладной со склада было выдано 0,7 имевшегося кирпича, а по второй — 0,4 остатка, после чего кирпича на складе осталось 5850 штук. Какое количество кирпича было на складе первоначально?

630. У Максима было 50 компакт-дисков с играми. На время каникул он дал Антону 0,3 этого количества, а Вадиму — 0,4 остатка. Сколько дисков осталось у Максима?

631. На дискете записана информация в трех файлах. На первый файл приходится 30% всего объема информации, на второй — 30% остатка, а объем третьего файла — 539 Кб. Найдите объем информации, записанной на дискету.

632. Во время гонок по бездорожью 0,2 всего пути автомобиль двигался со скоростью 64 км/ч, 15% всего пути — со скоростью 60 км/ч, а остальные 260 км — со скоростью 52 км/ч. Найдите длину дистанции и время, за которое она была пройдена автомобилем. Какова была средняя скорость автомобиля на этой дистанции?

633. Пассажирский поезд, двигаясь со скоростью 90 км/ч, за 3 ч проходит 75% расстояния между городами. Какова средняя скорость пассажирского поезда, если весь путь между этими городами он проходит за 4,5 ч? Найдите среднюю скорость товарного поезда, если этот же путь занимает у него 6 ч.

634. а) Площадь кухни 12 м^2, а площадь квартиры составляет $\frac{8}{3}$ площади кухни. Найдите площадь квартиры.

б) Набор инструментов для домашней мастерской стоит 2780 р., что составляет $\frac{10}{7}$ стоимости ручной дрели. Определите стоимость дрели.

▷ Решая задачу 634 а), мы использовали правило отыскания части от целого, хотя за целое принята площадь кухни, которая меньше площади квартиры, а в решении задачи 634 б) использовали правило отыскания целого по его части, хотя за целое принята стоимость дрели, которая дешевле, чем весь набор. В таких случаях не принято говорить, что находят часть целого или целое по его части. Здесь используется другая терминология: отыскание *дроби числа* или *числа по его дроби*. ◁

635. Трое студентов получили стипендию. Первый получил 0,9 той суммы, которую получил второй, и еще 25 р., а третий студент получил 0,95 той суммы, которую получил второй, и еще 15 р. Сколько денег получил каждый студент, если известно, что первый и третий получили поровну?

636. В цистерне 42 т бензина. Вначале из нее откачали $\frac{2}{7}$ всего бензина, затем 40% оставшегося в ней бензина, а затем $\frac{5}{6}$ нового остатка. Сколько бензина осталось в цистерне?

637. а) В первый день магазин продал $\frac{2}{9}$ всех овощей, во второй — $\frac{3}{4}$ остатка, а в третий день — остальные 196 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

б) Самое высокое сооружение в мире — телевизионная башня в Торонто, ее высота — 553,33 м. Немного ниже Останкинская телебашня, ее высота составляет примерно 97,6% высоты башни в Торонто. Определите высоту Шаболовской телебашни (башни Шухова), зная, что ее высота примерно на 72,538% меньше высоты Останкинской телебашни (ответ округлите до единиц).

Вычислите:

638. а) $\left(2\frac{5}{6}+1\frac{7}{9}\right)\cdot 3\frac{3}{5}+\left(2\frac{5}{6}-1\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-2\frac{16}{19}\right)$;

б) $\left(2\frac{2}{15}+2\frac{7}{10}\right):1\frac{2}{27}-\left(2\frac{7}{10}-2\frac{2}{15}\right):2\frac{3}{7}$;

в) $\left(1\frac{1}{12}+1\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-1\frac{11}{13}\right)-\left(1\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}\right)\cdot 1\frac{7}{26}$;

г) $\left(1\frac{2}{9}+1\frac{7}{12}\right):1\frac{47}{54}+\left(1\frac{2}{9}-1\frac{7}{12}\right)\cdot 5\frac{7}{13}$.

639. а) $0{,}78\cdot 1{,}9-3{,}14\cdot 2{,}65$;

б) $(13-12{,}47)\cdot 0{,}8\cdot(-19)$;

в) $(16{,}97+25{,}84)\cdot(-35{,}55:4{,}5)$;

г) $(5{,}48+8{,}02):((-12{,}87-5{,}73):3{,}72)$.

Решите уравнение:

640. а) $\frac{1}{3}x+1=2-\frac{1}{6}x$; в) $\frac{1}{4}x-3=\frac{1}{8}x+5$;

б) $2-\frac{1}{5}x=\frac{1}{15}x-2$; г) $\frac{1}{21}x+84=85+\frac{1}{7}x$.

Найдите значение y по данному значению x (№ 641—644), заполните таблицу и отметьте точки с координатами $(x;\ y)$ на координатной плоскости. Укажите координаты точек, симметричных:

а) относительно начала координат;

б) относительно оси ординат;

в) относительно оси абсцисс.

641. $y=\frac{1}{2}x$.

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
y							

642. $y = -\frac{1}{2}x$.

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
y							

643. $y = \frac{1}{3}x$.

x	–9	–6	–3	0	3	6	9
y							

644. $y = -\frac{1}{3}x$.

x	–9	–6	–3	0	3	6	9
y							

645. В 200 г раствора содержится 8 г соли. Определите процент содержания (говорят также «процентное содержание») соли в растворе.

646. Какой процент от 15 т составляют 420 кг; 1,2 т; 150 кг?

647. а) Из 225 кг руды можно получить 34,5 кг меди. Каково процентное содержание меди в руде?

б) Из 105 посеянных семян взошли 98. Определите процент всхожести семян.

Контрольные задания

1. Придумайте сами или приведите в качестве примера решенную задачу, в которой находится целое по его части. Найдите число, если:

   а) $\frac{3}{7}$ его равны 21; б) 0,7 его равны 420; в) 17% его равны 68.

2. $\frac{2}{5}$ всего запаса топлива имеют массу 15 т. Найдите массу всего топлива.

3. За первый день турист прошел половину всего маршрута, а за второй — $\frac{2}{3}$ его оставшейся части. Какую часть маршрута осталось пройти туристу за третий день пути?

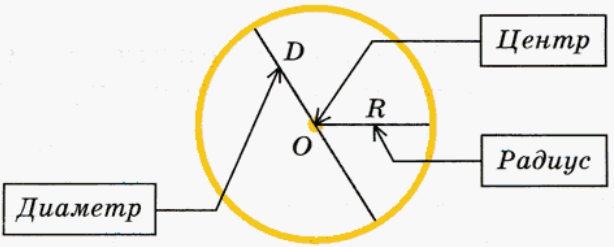
§ 22. ОКРУЖНОСТЬ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

В известном романе английского писателя-фантаста Герберта Уэллса рассказывается о вторжении на Землю марсиан. Сопротивление землян было подавлено марсианами без особого труда, поскольку их оружие было намного эффективнее земного. К счастью, для землян все закончилось благополучно — марсиане умерли от земного вируса, против которого у них не было иммунитета. При изучении оставшейся от марсиан техники выяснилось, что в ней отсутствуют колеса и вообще вращающиеся детали. Для нас это кажется невероятным — в наше время почти весь мир передвигается на колесах. Но на самом деле далеко не всегда земная цивилизация была знакома с колесом. Так, например, американские индейцы и некоторые другие племена и народы Земли не знали колеса, пока туда не добралась европейская цивилизация. Однако какому народу принадлежит первенство в изобретении колеса, доподлинно не известно.

Сравните рисунки 87, а и 87, б.

Колесо

а)



Окружность

б)

Рис. 87

На рисунке 87, а изображено колесо, а на рисунке 87, б — его математическая модель — окружность. У колеса, как и у окружности, есть радиус, диаметр и центр. Поскольку колесо ограничено двумя окружностями, внутренней и внешней, у него рассматривают два радиуса и два диаметра: для внутренней и для внешней окружностей. Измерить радиусы или диаметры внешней и внутренней окружностей колеса несложно. Но уже с древних времен перед людьми встала необходимость определять *длину окружности* колеса. Например, для того чтобы деревянное колесо дольше служило, его обивали металлическим ободом. Чтобы его изготовить, естественно, надо было знать длину этого обода, т. е. длину окружности колеса. Как же ее определить?

Для внешней окружности это несложно: достаточно взять веревку, обмотать ею колесо и измерить длину намотанной части веревки. А как быть с внутренней окружностью? Можно, конечно, исхитриться и придумать какой-то способ, может быть, даже не один. Но ясно, что это гораздо сложнее, чем для внешней окружности.

Есть и другие примеры того, как сложно бывает измерить длину окружности. Но, как вы, наверное, уже убедились, математики ищут и зачастую находят простые способы решения разных проблем. Неизвестно, кому первому пришло в голову сравнить длину окружности с ее диаметром, в частности узнать, во сколько раз длина окружности больше ее диаметра. Ведь диаметр измерить значительно проще и, умножив длину диаметра на эту величину, можно было бы определить длину окружности.

Сначала было замечено, что длина любой окружности примерно в 3 раза больше диаметра. Затем этот результат был уточнен — в $3\frac{1}{7}$ раза, но и тогда математики знали, что это число тоже не является точным. Чтобы не было проблем при записях расчетов, математики Древней Греции стали обозначать это число буквой греческого алфавита — π (пи). Было доказано, что число π относится к таким числам, точное значение которых записать невозможно ни с помощью обыкновенных, ни с помощью десятичных дробей.

Нам для вычислений достаточно использовать значение π, округленное до разряда сотых: $\pi \approx 3{,}14$. Ниже записано значение π, округленное до разряда стомиллиардных:

$$\pi \approx 3{,}14159265359.$$

Что же касается более точных расчетов, то компьютеры позволяют при помощи специальных программ определять значение π практически с любой точностью.

Обозначив длину окружности буквой C, а диаметр — D, запишем формулу длины окружности:

$$C = \pi D.$$

Обычно длину окружности выражают через ее радиус R. Поскольку $D = 2R$, формулу длины окружности можно записать в таком виде:

$$C = 2\pi R.$$

648. По рисунку 87, а определите длины внутренней и внешней окружностей колеса, если изображение сделано в масштабе 1 : 20 ($\pi \approx 3{,}14$).

649. Измерьте диаметр окружности (рис. 88) и найдите ее длину по формуле $C = \pi D$ ($\pi \approx 3{,}14$).

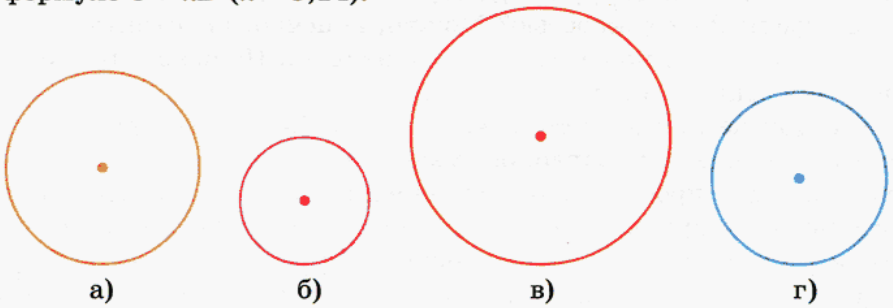


Рис. 88

650. Измерьте радиус окружности (рис. 89) и найдите ее длину по формуле $C = 2\pi R$ ($\pi \approx 3{,}14$).

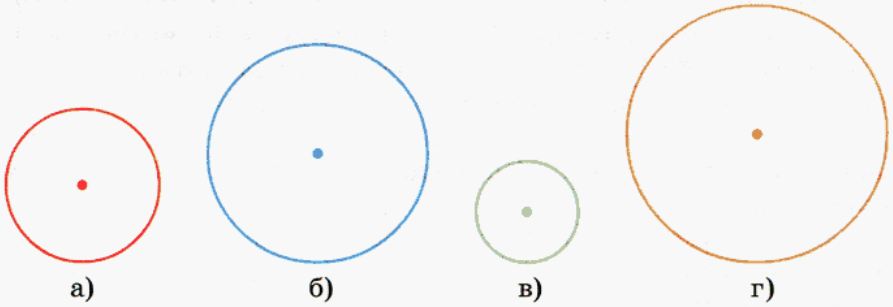


Рис. 89

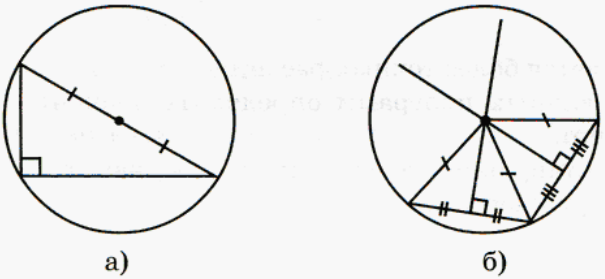


Рис. 90

Рассмотрите рисунок 90. Он поможет вам вспомнить, как найти центр окружности, если он не обозначен, используя следующие свойства:

а) если вершина угла лежит на окружности, а стороны проходят через концы диаметра, то этот угол прямой;

б) точки серединного перпендикуляра равноудалены от концов отрезка.

651. Найдите центр окружности, используя свойство прямого угла (рис. 91), измерьте диаметр и вычислите длину окружности ($\pi \approx 3{,}14$).

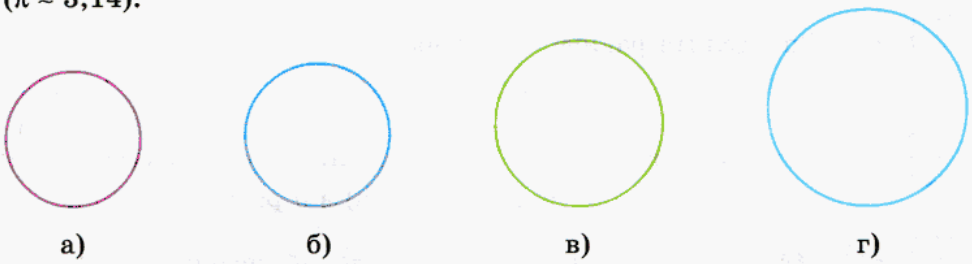


Рис. 91

652. Найдите центр окружности, используя свойство серединного перпендикуляра (рис. 92), измерьте радиус и вычислите длину окружности ($\pi \approx 3{,}14$).

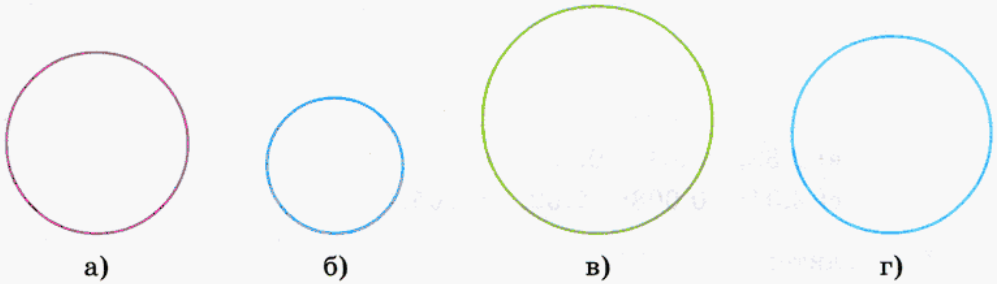


Рис. 92

653. Начертите на отдельном листе бумаги окружность, используя какой-нибудь предмет — тарелку, блюдце или чашку. Найдите центр окружности удобным для вас способом и вычислите ее длину ($\pi \approx 3{,}14$).

654. Полагая, что $\pi \approx 3{,}14$, определите диаметр окружности, длина которой равна:

а) 4,71 м; б) 0,785 м; в) 54,95 см; г) 0,2669 см.

655. Полагая, что $\pi \approx 3{,}14$, определите радиус окружности, длина которой равна:

а) 10,833 м; б) 6,5312 дм; в) 18,8557 км; г) 0,0157 см.

656. Определите диаметр окружности, длина которой равна:

а) 7π м; б) 9π см; в) $0{,}75\pi$ км; г) $3{,}14\pi$ см.

657. Определите радиус окружности, длина которой равна:

а) 8π м; б) 5π м; в) 2π м; г) π м.

658. Как изменится длина окружности, если ее радиус увеличить:

а) в 2 раза; б) на 2 см; в) в 5 раз; г) на 5 см?

659. Представьте число в виде десятичной дроби:

а) $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $2\frac{7}{8}$; $3\frac{17}{20}$;

б) $\frac{17}{40}$; $\frac{63}{125}$; $4\frac{2}{5}$; $2\frac{5}{16}$;

в) $\frac{14}{35}$; $\frac{72}{75}$; $5\frac{33}{220}$; $1\frac{6}{15}$;

г) $\frac{7}{5}$; $\frac{32}{25}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{73}{50}$.

660. Представьте число в виде обыкновенной дроби или смешанного числа:

а) 0,75; 2,5; 7,5; 0,025;

б) 1,08; 0,004; 2,05; 0,0045;

в) 2,38; 0,64; 0,2; 1,6;

г) 2,04; 0,008; 7,02; 0,005.

Вычислите:

661. а) $3 - 2\frac{3}{8}$; б) $2 - 2\frac{3}{8}$; в) $1 - 2\frac{3}{8}$; г) $-2 - 2\frac{3}{8}$.

662. а) $2 + 3\frac{7}{11}$; б) $-2 + 3\frac{7}{11}$; в) $2 - 3\frac{7}{11}$; г) $-2 - 3\frac{7}{11}$.

663. а) $7\frac{2}{5} + 5$; б) $-7\frac{2}{5} + 5$; в) $-7\frac{2}{5} - 5$; г) $7\frac{2}{5} - 5$.

664. а) $-3\frac{9}{16} + 2$; б) $-3\frac{9}{16} + 4$; в) $-3\frac{9}{16} - 2$; г) $3\frac{9}{16} - 4$.

665. Найдите произведение числа $33\frac{1}{3}$ и суммы чисел $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{25}$.

666. Вычислите произведение суммы чисел $7\frac{1}{3}$ и $8\frac{5}{6}$ и разности этих чисел.

667. В трех мешках было поровну крупы. После того как из каждого мешка было продано по 8 кг крупы, во всех трех мешках осталось столько крупы, сколько ее было в одном мешке первоначально. Сколько килограммов крупы было во всех трех мешках первоначально?

668. Вычислите:

а) $\dfrac{1,3 \cdot 4 + 1,3 \cdot 5 - 3,3 \cdot 3 - 3,3 \cdot 6}{2 \cdot 0,7 + 1,1 \cdot 2}$;

б) $\dfrac{3,5 \cdot 0,5 - 1,5 \cdot 0,5 + 5,5 \cdot 1,7 + 5,5 \cdot 1,3}{0,3 \cdot 0,8 - 0,3 \cdot 0,2}$;

в) $\dfrac{2,4 \cdot 7 + 3,8 \cdot 7 + 6,2 \cdot 2}{1,2 \cdot 5,8 - 1,2 \cdot 2,7 - 3,1 \cdot 1,02}$;

г) $\dfrac{4,8 \cdot 32 + 24 \cdot 7,3 - 24 \cdot 2,5}{12 \cdot 0,8 + 0,32 \cdot 7 + 0,32 \cdot 5}$.

669. Определите, сколько осей симметрии имеет фигура (рис. 93).

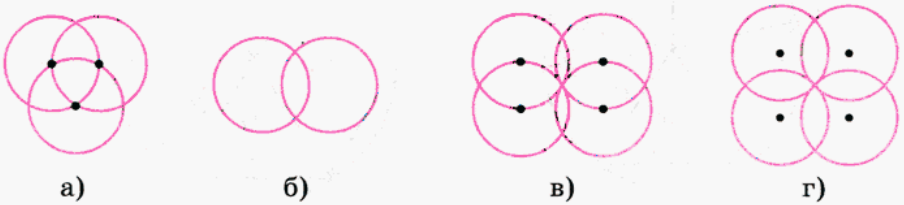


Рис. 93

670. ▷ Многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны, называют *правильным*. Правильный многоугольник можно разрезать на равные треугольники (рис. 94). Используя то, что на каждом рисунке в одном из треугольников проведена высота, найдите площадь соответствующего многоугольника.

671. Рассмотрите рисунок 95. Здесь вершины правильных многоугольников расположены на окружностях.
Подумайте, на каком рисунке периметр многоугольника меньше всего отличается от длины соответствующей окружности, а на каком — больше всего.

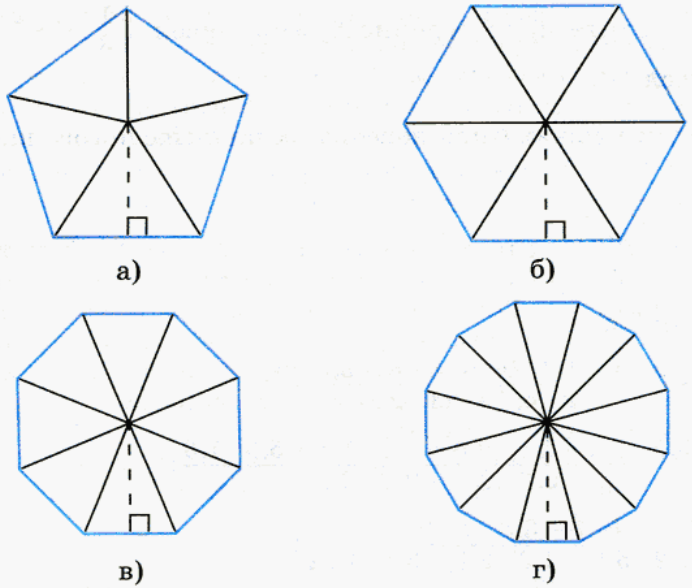


Рис. 94

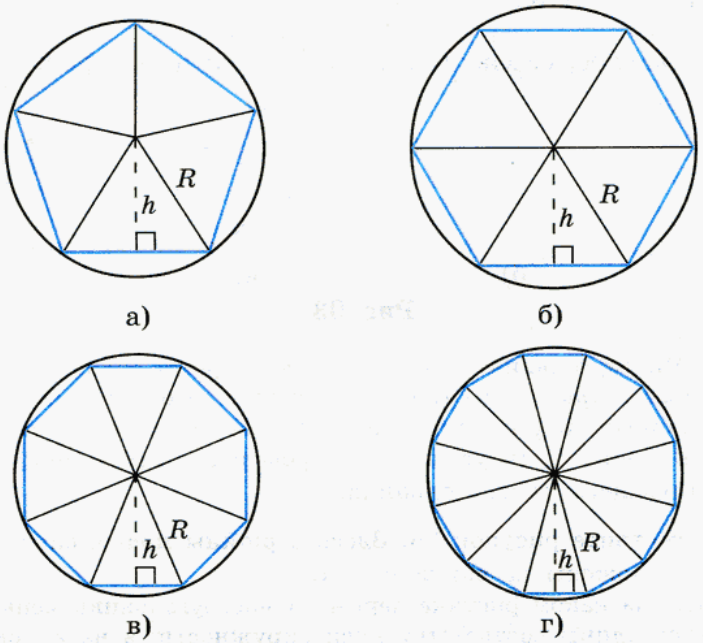


Рис. 95

Как изменяется разность длины окружности и периметра, если число сторон многоугольника увеличивать? уменьшать?
Сравните высоту треугольника h с радиусом R в каждом случае. В каком случае разница между длинами h и R наименьшая; в каком — наибольшая? Что происходит с высотой, если число сторон многоугольника увеличивается?

Проверьте себя.

Периметр 12-угольника (г) меньше всего отличается от длины окружности, а больше всего отличается от длины окружности периметр пятиугольника (а). Если число сторон правильного многоугольника увеличивать, то его периметр будет все меньше и меньше отличаться от длины окружности. Если же число сторон многоугольника уменьшать, то его периметр будет уменьшаться, а разность между длиной окружности и периметром будет увеличиваться.

Высота треугольника h при увеличении числа сторон многоугольника все меньше и меньше отличается от радиуса соответствующей окружности. ◁

672. Отметьте точку M и проведите через нее 4 окружности радиусом 2 см так, чтобы их центры являлись вершинами квадрата.

673. Отметьте точку M и проведите через нее 8 окружностей радиусом 3 см так, чтобы их центры являлись вершинами правильного восьмиугольника. (*Подсказка*: восьмиугольник удобно расположить так, как показано на рисунке 96.)

Рис. 96

674. Решите уравнение:

а) $2(x + 5) - (x + 25) = 0$;
б) $3(x - 11) - 4(x - 10) = 0$;
в) $5(x + 7) - 6(x + 6) = 0$;
г) $6(2x - 3) - 4(3x - 8) = 0$.

Контрольные задания

1. Запишите формулу длины окружности двумя способами: через диаметр и через радиус. Во сколько раз длина окружности больше длины диаметра?

Задания 2—4 выполните, считая, что $\pi \approx 3{,}14$.

2. Определите длину окружности, если: а) ее радиус равен 2,1 см; б) ее диаметр равен 15 см.
3. Определите радиус окружности, если ее длина 10,833 м.
4. Определите диаметр окружности, если ее длина 3,297 дм.

§ 23. КРУГ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью (рис. 97). До сих пор мы знали формулы площадей прямоугольника и треугольника, а также определяли площади некоторых других фигур, ограниченных чаще всего отрезками прямых, разрезая и перекраивая эти фигуры. Круг — это фигура, ограниченная кривой линией, но и площадь круга можно определить. Формула площади круга известна математикам с древнейших времен:

Рис. 97

$$S_{круга} = \pi R^2,$$

где R — радиус круга.

▷ Рассмотрим, как можно получить формулу площади круга, используя фигуры, площади которых мы определять уже умеем. На рисунках 98, 99 изображены окружности, проходящие через вершины правильных многоугольников. Площадь такого многоугольника очень незначительно отличается от площади соответствующего круга. Если же увеличивать число сторон многоугольника бесконечно, то он практически сольется с окружностью. Используя этот факт, можно получить формулу площади круга.

Пусть n — число сторон правильного многоугольника. Тогда

$$S_{мн\text{-}ка} = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot h) \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(a \cdot n)}_{2\pi R} \cdot \underbrace{(h)}_{R} \to S_{круга} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

где $\to$ означает «стремится к...».

Итак, площадь круга можно вычислить по формуле

$$S_{круга} = \pi R^2.$$ ◁

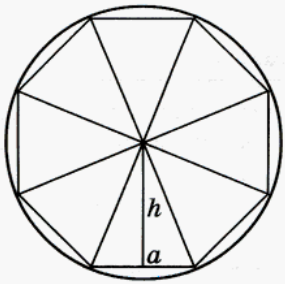


Рис. 98

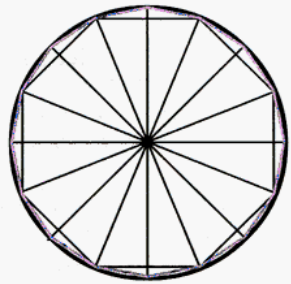


Рис. 99

Выполните следующие задания, считая π равным 3,14.

675. Найдите площадь круга, радиус которого равен:
а) 3 см; б) 5 м; в) 7 м; г) 1,2 см.

676. Найдите площадь круга, если его диаметр равен:
а) 0,8 см; б) 1,8 м; в) 2,6 см; г) 1,1 м.

677. Определите радиус круга, площадь которого равна:
а) 12,56 см^2; б) 1,1304 м^2; в) 2,5434 см^2; г) 153,86 м^2.

678. Площадь круга равна:
а) 28,26 см^2; б) 113,04 см^2; в) 0,5024 м^2; г) 78,5 см^2.
Изобразите этот круг, проведите диаметр, радиус и укажите их длины.

679. Выполните необходимые измерения и найдите площадь фигуры (рис. 100).

Рис. 100

680. Выполните необходимые измерения и найдите площадь закрашенной части фигуры (рис. 101).

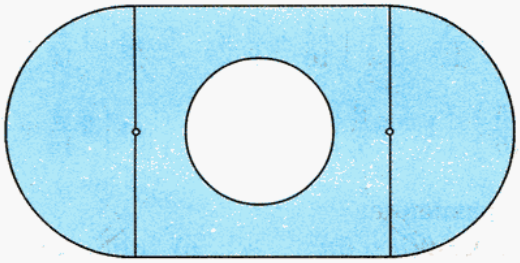


Рис. 101

681. Считая π равным $3\frac{1}{7}$, вычислите, какое расстояние пройдет колесо, диаметр которого $1\frac{3}{11}$ м, если оно совершит:

а) один оборот; в) полтора оборота;
б) два оборота; г) четверть оборота.

Найдите значение числового выражения:

682. а) $4\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{8}{13}\right)$; б) $-\frac{63}{73}\cdot 12\frac{1}{6}$; в) $20\frac{1}{4}\cdot 20\frac{5}{9}$; г) $-\frac{8}{11}\cdot\left(-2\frac{1}{12}\right)$.

683. а) $1\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$; б) $-\frac{2}{3} : \left(-1\frac{1}{4}\right)$; в) $-14\frac{1}{2} : 4\frac{1}{9}$; г) $-1\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$.

684. а) $5\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{20}$; б) $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$; в) $-5\frac{1}{2}\cdot\left(-8\frac{1}{11}\right)$; г) $-3\frac{5}{9}\cdot 4\frac{7}{8}$.

685. Дано четыре числа: $5\frac{2}{9}$; $3\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{8}$ и $1\frac{1}{3}$.

Запишите следующие выражения и вычислите их значения:

а) сумма разности двух первых чисел и разности двух последних чисел;

б) разность суммы двух первых чисел и суммы двух последних чисел;

в) частное разности двух первых чисел и разности двух последних чисел;

г) частное произведения двух первых чисел и суммы двух последних чисел.

686. Вычислите:

а) $\left(\frac{13}{17}\cdot\frac{8}{9}-\frac{4}{17}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{11}{16}+\frac{3}{8}\right)$; в) $\left(1\frac{5}{12}-2\frac{1}{8}\right) : \left(1\frac{1}{2}+\frac{23}{30}\right)$;

б) $\left(\frac{3}{4}-\frac{15}{16}\right)\cdot\left(1-3\frac{2}{7}\right)$; г) $\left(2\frac{2}{15}-3\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{14}{15}+\frac{2}{45}\right)$.

687. Решите уравнение:

а) $10(y-2)=9(y-6)$; в) $7(3y-5)=-10(3-2y)$;
б) $-5(5-3y)=16(y-3)$; г) $14(3y-2)=-7(4-6y)$.

688. Вода при замерзании увеличивается в объеме на $\frac{1}{11}$ часть. На какую часть своего объема уменьшается лед при превращении в воду?

689. В урожайное время года (осенью) цены на овощи понизились в среднем на 50%, а к зиме они повысились на 10% по сравнению с прошлогодними ценами. На сколько процентов подорожали овощи по сравнению с осенью?

Контрольные задания

1. Запишите формулу площади круга.
2. Вычислите площадь круга, радиус которого равен 2,5 м.
3. Определите радиус круга, площадь которого равна 50,24 м^2.

§ 24. ШАР. СФЕРА

В чем с точки зрения математики принципиальное различие таких предметов, как арбуз и волейбольный мяч, стальной шарик и пластиковый шарик для игры в настольный теннис?

Математики не интересуются, из какого *материала* сделан тот или иной предмет, их интересует только *форма* этого предмета. В обыденной жизни говорят, что все названные выше предметы имеют форму **шара**. Однако волейбольный мяч и шарик для настольного тенниса, в отличие от арбуза и стального шарика, внутри полые. Для таких «шаров» в математике есть специальное название — **сфера**. Таким образом, с точки зрения математики арбуз и стальной шарик — это шары, а волейбольный мяч и шарик для настольного тенниса — это сферы.

На рисунке 102 изображены шар и сфера. Как видим, они ничем не отличаются. Это и неудивительно, ведь сфера является поверхностью шара, его оболочкой. Точно так же обстоит дело и с геометрическим рисунком: и шар, и сфера изображаются одинаково, а невидимые линии проводятся пунктиром (рис. 103).

Итак, шар — это пространственное тело, а сфера — поверхность шара. Поэтому для шара можно определить его объем, а для сферы — площадь.

Обычный рисунок

Шар

Сфера

Рис. 102

Геометрический рисунок

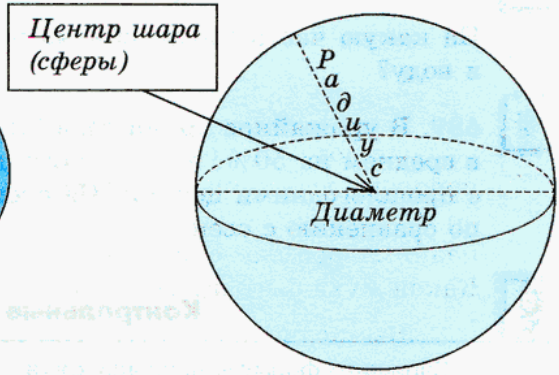


Рис. 103

Формулы объема шара и площади его поверхности (сферы) математикам известны с древних времен.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

объем шара

$$S = 4\pi R^2$$

площадь сферы

Как они получаются, вы узнаете в старших классах.

Выполните следующие задания, считая π равным $3\frac{1}{7}$.

690. Найдите объем шара, если его радиус равен:

а) $\frac{7}{8}$ м; б) $\frac{7}{11}$ м; в) $1\frac{3}{4}$ дм; г) $3\frac{1}{2}$ см.

691. Чему равен радиус шара, если его объем равен:

а) $4\frac{4}{21}$ м^3; б) $33\frac{11}{21}$ м^3; в) $\frac{99}{448}$ м^3; г) $\frac{392}{363}$ м^3?

692. Вычислите площадь сферы, если ее радиус равен:

а) $1\frac{10}{11}$ м; б) $\frac{7}{11}$ см; в) $3\frac{1}{16}$ дм; г) $2\frac{5}{8}$ км.

Вычислите:

693. а) $5\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{20}$; б) $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$; в) $-5\frac{1}{2} \cdot \left(-8\frac{1}{11}\right)$; г) $-3\frac{5}{9} \cdot 4\frac{7}{8}$.

Решите уравнение:

694. а) $1\frac{1}{3}x + 1\frac{5}{6} = 2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}x$; в) $7\frac{1}{4}x - 3\frac{3}{8} = 5\frac{1}{8}x + 5\frac{3}{4}$;

б) $2\frac{7}{15} - 3\frac{1}{5}x = 2\frac{1}{15}x - 1\frac{4}{5}$; г) $1\frac{1}{21}x + 4\frac{1}{3} = 2\frac{5}{21} + 3\frac{1}{7}x$.

695. От потолка комнаты вертикально вниз по стене одновременно поползли две мухи. Спустившись до пола, каждая поползла обратно. Первая муха ползла все время с постоянной скоростью, а вторая поднималась вдвое медленнее, а спускалась вдвое быстрее первой. Какая муха быстрее приползла обратно?

696. Вычислите:

а) $\left(-\frac{1}{2} - 0{,}8 + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(3 + 5\frac{8}{25} - 0{,}12\right)$;

б) $\left(2\frac{3}{4} + 0{,}15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(-2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} - 0{,}04\right)$;

в) $\left(-2{,}314 + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{50} + \left(1\frac{11}{16} + 0{,}7125\right) : (-3)$;

г) $-1{,}456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : (-0{,}125) - 4\frac{1}{2} \cdot 0{,}8$.

Представьте число в виде обыкновенной дроби:

697. а) 0,75; б) 3,4; в) 0,125; г) 2,35.

698. а) 0,25; б) 1,6; в) 0,375; г) 4,8.

699. а) 0,2; б) 0,8; в) 2,34; г) 1,95.

700. а) 0,5; б) 2,3; в) 0,625; г) 1,38.

Вычислите:

701. а) $\frac{1}{3} - 0{,}5$; б) $1{,}2 + \frac{3}{7}$; в) $-0{,}4 + \frac{5}{6}$; г) $-\frac{2}{3} - 0{,}6$.

702. а) $\frac{1}{15} \cdot 1{,}5$; б) $(-0{,}26) : \left(-\frac{39}{50}\right)$; в) $5{,}1 \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)$; г) $\left(-\frac{19}{20}\right) : 3{,}8$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры предметов, имеющих форму шара, сферы. Чем является сфера по отношению к шару?
2. Вычислите объем шара и площадь его поверхности, если радиус шара равен $\frac{1}{4}$ м.

ГЛАВА III ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 25. ДЕЛИТЕЛИ И КРАТНЫЕ

У **703.** Для украшения праздничного зала приобрели 35 гвоздик, из которых были сделаны одинаковые по числу цветов букеты. Ответьте на вопросы и выполните задания:

а) Могли ли сделать 5 одинаковых букетов; 12 одинаковых букетов?

б) Найдите возможные варианты числа букетов, заполнив следующую таблицу:

Число цветов в букете	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Число букетов																	

Количество одинаковых букетов — это число, на которое 35 делится без остатка, т. е. нацело. Если одно натуральное число нацело делится на другое натуральное число, то первое называют *кратным* второму, а второе — *делителем* первого. Таким образом, если a и b — натуральные числа и a делится на b нацело, то a кратно b, а b — делитель a. Например, из того, что $45 : 9 = 5$, следует, что 45 кратно 9, а 9 — делитель числа 45.

Вместо фразы: «a делится нацело на b» — часто используют запись $a \vdots b$. Например, вместо очевидных утверждений: «a делится на a» или «a делится на 1» — можно писать $a \vdots a$ или, соответственно, $a \vdots 1$. Ясно, что если $a \vdots b$, то $a \geqslant b$.

Обратите внимание, что запись $8 : 2$ означает требование выполнить деление числа 8 на число 2 (в результате этой операции получится число 4), в то время как запись $8 \vdots 2$ означает, что число 8 делится на 2 (как уже было сказано выше, делится нацело, делится без остатка), и речь идет лишь о принципиальной возможности выполнить деление, а само деле-

ние выполнять не требуется. Примерно так же обстоит дело со знаком >. Если написано 8 > 2, то это лишь констатация факта: число 8 больше числа 2; при этом отвечать на вопрос *на сколько больше* не требуется.

У **704.** 1) Укажите все делители числа 45, запишите соответствующие равенства.

2) Укажите числа, которым кратно число 45.

Что вы заметили?

705. а) Из чисел 2, 4, 16, 20, 24, 26, 40, 45, 88, 100 выберите кратные 8.

б) Из чисел 2, 5, 7, 15, 11, 14 выберите те, которые являются делителями числа 462.

706. а) Из чисел 7, 14, 17, 28, 34, 56 выберите кратные 14.

б) Из чисел 2, 7, 15, 30, 50, 60 выберите те, которые являются делителями числа 270.

У **707.** 1) Какие из следующих чисел кратны 12:

4, 6, 12, 24, 30, 48, 60, 120?

Запишите еще три каких-нибудь числа, кратных 12.

2) Из данных чисел выберите те, которые кратны 15:

3, 5, 30, 50, 60, 75, 90, 120, 150.

Запишите еще три каких-нибудь числа, кратных 15.

3) Из ответов к предыдущим заданиям выберите числа, которые одновременно являются кратными для чисел 12 и 15. Укажите наименьшее из них.

У **708.** Вычислите:

1) $\frac{5}{12} + \frac{4}{15}$; 2) $\frac{11}{12} - \frac{7}{15}$.

Общий знаменатель, который мы находим, складывая или вычитая дроби с разными знаменателями, является кратным каждого из знаменателей, или, как говорят, **общим кратным** знаменателей. Для того чтобы не усложнять вычислений, обычно стараются найти **наименьшее** из **общих кратных** знаменателей.

Наименьшее общее кратное чисел m и n принято обозначать **НОК** $(m; n)$.

709. Укажите: а) НОК (8; 12); б) НОК (9; 15).

710. Вычислите:

а) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{9}-\frac{4}{15}$; в) $\frac{7}{12}-\frac{5}{8}$; г) $\frac{11}{15}+\frac{2}{9}$.

711. Определите, не вычисляя, является ли число $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ кратным числам a, b, c и d, если $a = 2 \cdot 3$, $b = 2 \cdot 2$, $c = 3 \cdot 5$, $d = 5 \cdot 7$.

712. Для данного множества чисел A определите, являются ли все элементы множества кратными какому-нибудь натуральному числу, отличному от 1:

а) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$;
б) $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$;
в) $A = \{75, 80, 85, 90, 95, 100, 105\}$;
г) $A = \{148, 248, 348, 448, 548, 648\}$.

713. В коробке лежат карандаши. Число их больше 200, но меньше 300. Сколько карандашей в коробке, если известно, что там содержится целое число десятков и целое число дюжин?

714. Три теплохода совершают рейсы из одного и того же порта. Первый теплоход возвращается из рейса через 6 дней после выхода, второй — через 5 дней и третий — через 10. Через какое ближайшее время встретятся в порту первый теплоход со вторым, второй с третьим и три теплохода вместе, если все они вышли из порта одновременно?

715. Вдоль дороги через каждые 45 м стоят столбы. Их решили заменить другими, увеличив расстояние между столбами до 60 м. На каком расстоянии от первого столба новый столб установят на то же место, где стоял старый?

716. Используя равенства $204 = 6 \cdot 34$ и $209 = 6 \cdot 34 + 5$, найдите значения выражений $204 : 6$ и $209 : 6$.

Ответьте на вопросы:

1) Является ли число 6 делителем числа 204; числа 209?
2) Существует ли натуральное число k такое, что $6 \cdot k = 204$?
3) Существует ли натуральное число n такое, что $6 \cdot n = 209$?
4) Пусть m и n — натуральные числа. Справедливо ли утверждение:

если m — делитель n, то существует такое натуральное число k, что $n = m \cdot k$?

Делителем числа n является такое число m, на которое n делится нацело. Определение делителя можно сформулировать так:

пусть n и m — натуральные числа, тогда m — делитель n, если существует такое натуральное число k, что $n = m \cdot k$.

Например, 5 — делитель числа 120, так как $120 = 5 \cdot 24$; 13 — делитель числа 39, так как $39 = 13 \cdot 3$.

717. Используя определение делителя, докажите, что:

а) 38 — делитель числа 19 228;

б) число 11 523 кратно 23;

в) 29 не является делителем числа 6033;

г) число 49 348 не кратно 61.

Проверьте себя.

а) Имеем: $19\ 228 : 38 = 506$. Значит, $19\ 228 = 38 \cdot 506$, т. е. существует число k такое, что $19\ 228 = 38 \cdot k$ (в данном случае $k = 506$). Итак, 38 — делитель числа 19 228;

б) a кратно b, если b — делитель a; рассуждая так же, как в предыдущем пункте, можно доказать, что 23 — делитель числа 11 523.

718. Докажите, что:

а) каждое натуральное число является для себя и делителем, и кратным;

б) если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

719. а) Какое число является делителем любого натурального числа?

б) Может ли число иметь только 2 делителя?

в) Какое число имеет только 1 делитель?

г) Какое число является наибольшим делителем для натурального числа n, какое — наименьшим?

720. Для подарков участникам школьного конкурса рисунков приобрели 28 коробок гуаши и 42 кисти, из которых составили одинаковые наборы. Ответьте на вопросы и выполните задания.

а) Могли ли составить 7 одинаковых наборов; 10 одинаковых наборов?

б) Найдите возможные варианты наборов, заполнив следующую таблицу:

Число наборов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число коробок гуаши														
Число кистей														

в) Может ли число таких наборов быть больше четырнадцати?

Решая задачу, вы заметили, что количество одинаковых наборов — это число, которое одновременно является делителем чисел 42 и 28.

Числа, которые одновременно являются делителями некоторых чисел, называются их **общими делителями**.

Наибольший общий делитель чисел m и n обозначают **НОД** $(m; n)$. Так, НОД (28; 42) = 14. В задаче о наборах это означает, что наибольшее число одинаковых наборов, которые можно составить из 28 коробок гуаши и 42 кистей, равно 14. Если же надо сократить дробь $\frac{28}{42}$, то удобнее всего ее числитель и знаменатель разделить сразу на 14. В результате получится несократимая дробь: $\frac{28}{42} = \frac{28 : 14}{42 : 14} = \frac{2}{3}$.

Подумайте, может ли получиться сократимая дробь, если ее числитель и знаменатель разделить на их наибольший общий делитель.

721. а) Найдите все делители числа 48; числа 60;
б) выпишите общие делители чисел 48 и 60;
в) укажите НОД (48, 60);
г) сократите дробь $\frac{48}{60}$.

722. 1. Запишите все общие делители чисел:
а) 36 и 45; б) 24 и 30; в) 50 и 75; г) 90 и 96.

2. Найдите:
а) НОД (36; 45); в) НОД (50; 75);
б) НОД (24; 30); г) НОД (90; 96).

723. Сократите дробь:

а) $\frac{36}{45}$; б) $\frac{24}{30}$; в) $\frac{50}{75}$; г) $\frac{90}{96}$.

724. Найдите НОД (15; 25; 45), НОД (22; 44; 33), НОД (13; 27; 29).

725. а) Найдите НОД (221; 247).

б) Сократите дробь $\frac{221}{247}$.

При решении последней задачи на отыскание первого делителя каждого из чисел ушло довольно много времени. Если бы вам были известны какие-либо признаки, по которым можно было бы сразу определять, является число делителем или нет, то вы могли бы решать такие задачи гораздо быстрее. В дальнейшем мы рассмотрим различные **признаки делимости** натуральных чисел. При этом под термином «число» будем подразумевать натуральное число, а под термином «делится» — делится нацело.

Найдите значение выражения:

726. а) $\frac{43,7}{3,8}$; б) $\frac{1\frac{1}{4}}{3\frac{1}{8}}$; в) $\frac{8,8 \cdot 2\frac{3}{16}}{0,35 \cdot 1,1}$; г) $\frac{3\frac{6}{7} \cdot 2,1}{0,9 \cdot 2,7}$.

727. а) $\frac{115,62}{8,2}$; б) $\frac{2\frac{3}{7}}{3\frac{9}{14}}$; в) $\frac{0,45 \cdot 4,8}{2\frac{2}{7} \cdot 7\frac{1}{2}}$; г) $\frac{3,6 \cdot 0,8 \cdot 2\frac{3}{7}}{1\frac{1}{2} \cdot 9\frac{3}{5}}$.

728. а) $\frac{0,36}{0,15}$; б) $\frac{1,2 \cdot 3,4}{3,6 \cdot 1,7}$; в) $\frac{0,42 \cdot 1,4 \cdot 0,54}{2,8 \cdot 0,24 \cdot 9}$; г) $\frac{6,4 \cdot 0,57 \cdot 3,2}{1,9 \cdot 0,8 \cdot 9,6}$.

729. Каждое ребро куба увеличили на 40%. На сколько процентов увеличился объем куба? На сколько процентов увеличилась площадь его поверхности?

730. За 6 одинаковых учебников заплатили на 42 р. больше, чем за 5 одинаковых тетрадей. Учебник на 3 р. дороже тетради. Определите цены учебника и тетради.

731. Для туристического лагеря купили комплекты снаряжения двух видов — по 90 р. и по 120 р. за комплект — на сумму 2100 р. Сколько купили тех и других комплектов, если первых было на 14 больше, чем вторых?

732. Найдите целые числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $|x| \leqslant 3\frac{1}{4}$; б) $|y| < 5{,}1$; в) $|z| < \frac{3}{8}$; г) $|t| \leqslant 2{,}9$.

733. Отправившись в лес за грибами, Юра собирал только белые грибы, подберезовики и лисички. Всего Юра собрал 36 грибов. Сколько белых грибов собрал Юра, если их было в два раза меньше, чем подберезовиков, а подберезовиков было в три раза меньше, чем лисичек?

734. С 13 ч до 17 ч в понедельник группа фотографов будет делать индивидуальные фотографии 600 студентов. Сколько фотографов необходимо пригласить, если на фотографирование каждого студента требуется 2 минуты?

735. Каково наименьшее натуральное число, 20% которого больше, чем 1,2?

736. x — натуральное число из интервала (2; 6), а y — натуральное число из интервала (6; 9). Что больше, x или y?

737. Из отрезка [1; 3] выбирают натуральное число a. Из интервала (45; 52) выбирают натуральное число c. Сколько существует комбинаций (a; c) таких, что a — делитель c?

738. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его сторону увеличить на 150%? Как сформулировать эту задачу, не используя слово «процент»?

739. а) Таня купила книгу в магазине, в котором продаются только детективы и книги о животных. Какие из следующих утверждений заведомо верны:

- эта книга — детектив;
- эта книга о животных;
- эта книга не словарь;
- эта книга не детектив Агаты Кристи;
- эта книга не о животных Африки?

б) Опыт состоит в том, что между числами 102 и 115 наугад выбирается число n. Охарактеризуйте каждое событие как достоверное, невозможное или случайное:

- n кратно 10;
- n кратно 12;
- n кратно 20;
- n кратно 1.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете утверждение:
   а) a — делитель b; б) b кратно a; в) НОД $(m; n) = k$; г) НОК $(m; n) = k$?
2. Даны числа: 12, 24, 30, 43, 48, 55, 60. Запишите те из них, которые:
   а) кратны 3; б) являются делителями числа 120.

§ 26. ДЕЛИМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В следующих заданиях ответьте на вопросы, не выполняя вычислений.

У **740.** В книжный магазин привезли 53 упаковки книг по 18 штук в каждой. Можно ли эти книги распределить поровну между тремя продавцами?

У **741.** К празднику организация приобрела 3 упаковки роз по 125 штук в каждой упаковке. Можно ли сделать 25 одинаковых букетов, используя все эти цветы?

У **742.** Родители купили для школьного праздника 21 коробку конфет по 55 конфет в каждой. Можно ли их распределить поровну между учащимися шестых классов, если в них учатся 77 человек?

Проверьте свои ответы, выполнив вычисления.

743. Справедливы ли следующие утверждения:

1) произведение $24 \cdot 73$ делится на 3;

2) произведение $25 \cdot 58$ делится на 5;

3) произведение $11 \cdot 21 \cdot 63$ делится на 77;

4) если ни один из множителей не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число;

5) если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и все произведение делится на это число?

Ответы объясните.

Обоснования ответов по первым четырем утверждениям наверняка не вызвали у вас затруднений. Что касается последнего, то здесь для обоснования привести конкретные примеры недостаточно. Если вы предположили, что какое-либо утверждение справедливо всегда, необходимо провести рассуждения, которые покажут, что это утверждение верно для *любых*, а не только для каких-то *конкретных* чисел. Обычно в этих случаях числа обозначают буквами.

Постарайтесь доказать утверждение 5) в буквенной форме.

Проверьте себя.

Рассмотрим произведение чисел a и b: ab. Докажем, что если a делится на некоторое число c, то ab также делится на это число.

В самом деле, если a делится на некоторое число c, значит, существует число k такое, что $a = kc$, значит,

$$ab = kc \cdot b = c \cdot (kb),$$

т. е. существует такое число kb, что $ab = c \cdot (kb)$, следовательно, ab делится на c.

744. Не выполняя вычислений, укажите выражения, значения которых

а) кратны 3:

$19 \cdot 30$, $22 \cdot 17$, $34 \cdot 12$, $33 \cdot 25$,
$36 \cdot 7$, $94 \cdot 18$, $13 \cdot 45 \cdot 8$, $5 \cdot 7 \cdot 11$;

б) кратны 5:

$28 \cdot 25$, $73 \cdot 50$, $34 \cdot 48$, $64 \cdot 20$,
$35 \cdot 48$, $40 \cdot 71$, $58 \cdot 32$, $43 \cdot 89$;

в) кратны 7:

$14 \cdot 5$, $81 \cdot 21$, $56 \cdot 12$, $84 \cdot 27$,
$42 \cdot 13$, $85 \cdot 77$, $48 \cdot 54$, $63 \cdot 28$;

г) кратны 12:

$24 \cdot 15$, $48 \cdot 96$, $51 \cdot 36$, $6 \cdot 20$,
$17 \cdot 12$, $8 \cdot 30$, $25 \cdot 14$, $4 \cdot 27$.

745. Разделите на 5 произведение:

а) $15 \cdot 18$; б) $25 \cdot 31$; в) $94 \cdot 30$; г) $98 \cdot 75 \cdot 34$.

746. Разделите на 12 произведение:

а) $12 \cdot 7 \cdot 19$; б) $24 \cdot 5 \cdot 17$; в) $3 \cdot 4 \cdot 76$; г) $64 \cdot 48 \cdot 5$.

747. Покажите, что данные дроби можно сократить

а) на 9:

$\frac{27 \cdot 5}{34 \cdot 18}$; $\frac{63 \cdot 35}{17 \cdot 54}$; $\frac{6 \cdot 15}{12 \cdot 48}$; $\frac{94 \cdot 36}{33 \cdot 42}$;

б) на 8:

$\frac{31 \cdot 16}{42 \cdot 20}$; $\frac{4 \cdot 28}{48 \cdot 3}$; $\frac{32 \cdot 71}{44 \cdot 142}$; $\frac{10 \cdot 6 \cdot 14}{8 \cdot 15}$.

748. Сократите дробь:

а) $\frac{53 \cdot 17}{41 \cdot 17}$; в) $\frac{55 \cdot 18}{24 \cdot 33}$; д) $\frac{25 \cdot 32}{40 \cdot 35}$;

б) $\frac{64 \cdot 15}{72 \cdot 30}$; г) $\frac{42 \cdot 81}{56 \cdot 27}$; е) $\frac{16 \cdot 48}{24 \cdot 32}$.

Итак, в этом параграфе мы познакомились с признаком делимости произведения:

если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

В упражнениях № 749—752 предполагается, что все переменные — натуральные числа.

Найдите частное:

749. а) $(15xy) : 5$; в) $(28xyz) : 7$; д) $(35mn) : m$; ж) $(3mnk) : n$;
б) $(18ab) : 18$; г) $(54abc) : 54$; е) $(41cd) : 41$; з) $(72yz) : 9$.

750. а) Покажите, что произведение $24ab$ делится на $6a$; $8b$; $12ab$.
б) Покажите, что произведение $42xy$ делится на $7y$; $3x$; $6xy$.

751. Выполните деление:
а) $(12xy):(2x)$; б) $(14ab):(7b)$; в) $(45mn):(5m)$; г) $(24cd):(6d)$.

752. Запишите все делители произведений $6ab$; $8xyz$.

753. Найдите:
а) НОК (6; 15); б) НОК (24; 18).

754. Вычислите:

а) $\frac{5}{6}-\frac{7}{15}$; б) $\frac{1}{6}+\frac{4}{15}$; в) $\frac{3}{24}-\frac{5}{18}$; г) $\frac{7}{24}+\frac{11}{18}$.

Выполните действия:

755. а) $15\frac{7}{24}:3\frac{7}{120}$; в) $2\frac{3}{5}:1\frac{11}{15}$; д) $11\frac{7}{13}\cdot1\frac{23}{55}$;

б) $\left(-20\frac{1}{4}\right)\cdot20\frac{5}{9}$; г) $3\frac{1}{5}:\left(-9\frac{3}{5}\right)$; е) $4\frac{22}{55}\cdot\left(-3\frac{17}{27}\right)$.

756. а) $4\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{23}\right)$; в) $\left(-5\frac{1}{2}\right)\cdot8\frac{1}{11}$; д) $5\frac{11}{15}:\frac{43}{45}$;

б) $-6\frac{11}{25}:\left(-7\frac{2}{3}\right)$; г) $1:\frac{1}{9}:9$; е) $-\frac{70}{99}\cdot\left(-2\frac{2}{35}\right)$.

757. а) $\left(4\frac{1}{4}-6\frac{1}{2}\right):2\frac{4}{9}$; в) $\left(3\frac{5}{9}-4\frac{2}{3}\right):\left(-2\frac{7}{9}\right)$;

б) $\left(2\frac{1}{5}+\frac{14}{15}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-1\frac{5}{8}-2\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-4\frac{2}{7}\right)$.

758. а) $\left(-2\frac{5}{6}+3\frac{5}{24}\right):4\frac{1}{2}$; б) $\left(1\frac{2}{3}+2\frac{5}{9}\right):\left(-21\frac{3}{4}+7\frac{1}{2}\right)$.

759. а) $\frac{(2,35+4,65)\cdot5,3}{2,9-40}$; в) $\frac{0,72-0,104-0,112\cdot0,5}{0,063:1,26\cdot(-1,4)}$;

б) $\frac{(5,13-7,63)\cdot0,4}{3,17+6,83}$; г) $\frac{1,34-28,4\cdot2,5}{1,08:1,5+6,3:0,28}$.

760. Длина комнаты на 2,39 м больше ее ширины, а ее периметр равен 14,06 м. Найдите площадь комнаты.

761. В двух корзинах лежало 84 яблока. Когда из первой корзины переложили во вторую 15 яблок, то во второй корзине яблок оказалось в 3 раза больше, чем в первой. Сколько яблок было в каждой корзине до перекладывания?

762. В двух ящиках было 240 пачек чая. После того как из первого ящика переложили во второй 20 пачек, в первом осталось в 4 раза больше пачек, чем стало во втором. Сколько пачек чая было в каждом ящике первоначально?

763. Аля, Соня и Катя съели n конфет. Сколько конфет съела Катя, если Соня съела в два раза больше конфет, чем Катя, а Аля съела в два раза больше конфет, чем Соня?

764. Сколько процентов число $\frac{3}{4}$ составляет от числа:

а) 1; б) 2; в) 3; г) $\frac{1}{4}$?

765. Для любого натурального n определим $n\triangle$ как сумму всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Например, $3\triangle = 1 + 2 + 3 = 6$. Найдите k, если $10\triangle - 9\triangle = k\triangle$.

766. Число x равно сумме первых 20 натуральных чисел, а y равно сумме первых 10 натуральных чисел. Сравните $x - y$ и 100.

767. Сумма первого и последнего из 5 последовательных натуральных чисел равна 24. Чему равна сумма всех 5 чисел?

Контрольные задания

1. Сформулируйте признак делимости произведения.

2. Сократите дробь $\frac{18 \cdot 25}{40 \cdot 63}$.

§ 27. ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ И РАЗНОСТИ ЧИСЕЛ

Ответьте на вопросы следующих четырех задач, не выполняя вычислений.

768. В одном пакете было 15 орехов, а в другом — 21 орех. Можно ли эти орехи поделить поровну между тремя друзьями?

769. Бригада из пяти человек заработала на строительстве дома в первую неделю 8500 р., а во вторую — 9100 р. Можно ли эти деньги поделить поровну между всеми членами бригады?

770. В одном букете было 15, а в другом — 19 роз. Можно ли эти розы поставить в три вазы так, чтобы в каждой вазе цветов было поровну?

771. В одной коробке было 17 конфет, а в другой — 23 конфеты. Определите, можно ли эти конфеты разделить поровну между пятью гостями.

772. Верны ли следующие утверждения:

а) если хотя бы одно слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число;

б) если ни одно из слагаемых не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;

в) если каждое из слагаемых делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число?

Проверьте себя.

Первые два утверждения не должны были вызвать у вас затруднений. Чтобы доказать, что они неверны, достаточно привести *контрпример*. Скажем, 15 делится на 3, но 15 + 4 не делится на 3. Этот пример показывает, что утверждение а) неверно. Далее, 8 не делится на 3 и 7 не делится на 3, но их сумма (8 + 7), равная 15, делится на 3. Этот пример показывает, что утверждение б) неверно.

В последнем утверждении надо доказать, что оно верно для любых целых чисел. Рассуждать можно по-разному. Например, так:

«Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то это число является их общим делителем. А значит, его как общий множитель можно вынести за скобки. Получившееся выражение делится на этот множитель, следовательно, и исходное выражение тоже на него делится».

Обычно такие рассуждения проводят в буквенной форме.

Если числа a и b делятся на m, то $a + b = m \cdot k + m \cdot l = m \cdot (k + l)$. Мы получили выражение, которое делится на m, значит, и исходное выражение тоже делится на m.

Итак,

если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число.

Это одно из свойств делимости. В краткой форме его можно записать так:

Свойство 1. *Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a + c) \vdots b$.*

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) \vdots 3$.

Укажем некоторые другие свойства.

Свойство 2. *Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $a + c$ не делится на b.*

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что $12 + 22$ не делится на 3.

В то же время из того, что каждое слагаемое *не делится на b*, нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b. Например, 14 не делится на 3 и 22 не делится на 3, но $(14 + 22) \vdots 3$. Впрочем, об этом мы уже говорили выше.

Свойства 1 и 2 верны для суммы любого конечного числа слагаемых, и их можно сформулировать следующим образом: *если каждое слагаемое делится на число b, то и сумма делится на b*; *если каждое слагаемое, кроме одного, делится на b, то сумма не делится на b.*

Свойство 3. *Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.*

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$, можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

Свойство 4. *Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.*

Например, из того, что $48 \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $48 \vdots 3$.

773. Представляя число в виде суммы, докажите, что:

а) 777 777 делится на 7, на 77, на 11, на 777 и на 111;

б) 99 999 делится на 3, на 9;

в) 123 123 делится на 123;

г) 111 333 делится на 111.

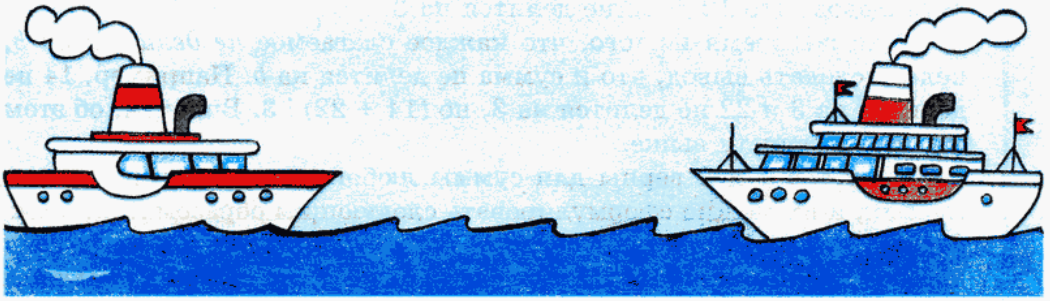
У **774.** Докажите, что если числа a и b делятся на m, то их разность тоже делится на m.

У **775.** Верно ли, что если один из двух компонентов разности (уменьшаемое или вычитаемое) делится на некоторое число, а другой — нет, то разность на это число не делится?

Ответьте на вопросы задач № 776—779 не выполняя вычислений. Укажите, какие свойства делимости вы при этом используете.

776. На одной полке 27 книг, а на другой — 18. Можно ли эти книги расставить на три полки так, чтобы на всех полках книг стало поровну?

777. На одном прогулочном катере 38 пассажиров, а на другом — 51. Можно ли их перераспределить так, чтобы на каждом из катеров пассажиров стало поровну?



778. В школе 4 шестых класса. Учащиеся приобрели билеты на экскурсию, причем в 6 «А» было приобретено 24 билета, в 6 «Б» — 16, в 6 «В» — 28 и в 6 «Г» — 32. Можно ли из всех этих ребят составить 4 группы с одинаковым числом экскурсантов в каждой?

779. В одном ящике 25 кассет, а в другом — 48. Можно ли эти кассеты разложить в коробки так, чтобы в каждой было по 5 кассет?

780. Укажите выражения, значения которых

а) кратны 2:
$24 + 18$, $12 + 16$, $25 + 1$, $34 + 1$, $8 + 19$, $28 + 7$, $43 + 7$, $8 + 16 + 56$;

б) кратны 3:
$12 + 33$, $10 \cdot 9 + 8$, $12 \cdot 5 + 15$, $99 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 3$, $27 \cdot 8 + 45 + 1$;

в) кратны 5:
$15 + 25$, $16 + 24$, $10 \cdot 8 + 20$, $100 \cdot 3 + 10 \cdot 7 + 8$, $27 \cdot 30 + 43 \cdot 45$;

г) кратны 7:
$28 + 35$, $44 + 12$, $25 + 35 \cdot 2$, $14 + 23$, $7 \cdot 15 + 42$, $12 \cdot 63 + 8 \cdot 19$.

781. Покажите, что данные дроби можно сократить:

а) на 5: $\frac{55+45}{30+35}$; $\frac{25+15}{20+60}$;

б) на 7: $\frac{42+28}{35+70}$; $\frac{63+14}{56+49}$;

в) на 11: $\frac{33+55}{11+77}$; $\frac{88-22}{99-66}$;

г) на 15: $\frac{45+150}{60+30}$; $\frac{225-180}{195+600}$.

782. Верно ли, что:

а) если сумма делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число;

б) если разность делится на некоторое число, то и уменьшаемое и вычитаемое делятся на это число;

в) если натуральное число a делится на число b, то a можно представить в виде суммы натуральных чисел, в которой каждое слагаемое делится на b;

г) если натуральное число a делится на число b, то a можно представить в виде разности натуральных чисел, каждое из которых делится на b?

783. Укажите три таких натуральных значения a, чтобы сумма $28 + a$:

а) делилась на 7; б) не делилась на 7.

784. Укажите три таких натуральных значения x, чтобы разность $78 - x$:

а) делилась на 2; б) не делилась на 2.

Верно ли, что:

785. а) $15 + 25$ делится на 5;
б) $250 - 68$ делится на 25;
в) $343\,434 + 68$ делится на 34;
г) $210\,210\,210 - 84$ делится на 21?

786. а) $360 - 40$ делится на 2;
б) $540 + 95$ делится на 10;
в) $4142 + 82$ делится на 41;
г) $4142 + 81$ делится на 41?

787. а) $391 \vdots 3$; б) $1001 \vdots 9$; в) $9975 \vdots 25$; г) $7158 \vdots 50$?

788. а) $2754 \vdots 9$; б) $1008 \vdots 9$; в) $9946 \vdots 27$; г) $43\,750 \vdots 50$?

789. Выполните действия:

а) $\left(4\frac{7}{12}-5\frac{3}{4}\right):\left(\frac{7}{36}-1\frac{1}{6}\right)$;

б) $\frac{3}{8}:\frac{5}{12}-3\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+1:3\frac{1}{3}$;

в) $1\frac{1}{4}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{5}\cdot 2\frac{11}{12}-1\frac{1}{6}:\frac{21}{22}$;

г) $\frac{3}{4}:\left(\frac{1}{14}-\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right)\cdot 6\frac{2}{3}$;

д) $\left(2\frac{3}{11}-1\frac{3}{22}\right)\cdot\left(3\frac{1}{7}+5\frac{1}{2}\right)$;

е) $\frac{15}{37}\cdot 1\frac{7}{30}-1\frac{29}{48}\cdot 1\frac{1}{63}$.

790. Выполните деление:

а) $(25a+15b):5$;
б) $(16c-12d):4$;
в) $(18x+6y):6$;
г) $(72-56ab):8$.

791. Выполните деление:

а) $(51a-18):3$;
б) $(24a+36):12$;
в) $(40xy+30):10$;
г) $(14x-28y):7$.

792. К некоторому натуральному числу прибавили 5, результат умножили на 7 и произведение увеличили на 2. Может ли получиться 777 777?

793. Если m и n — натуральные числа и $5m+n=33$, то каким может быть m?

794. Если m и n — натуральные числа и $5m+4n=42$, то каким может быть n?

795. Найдите:

а) НОК (20; 30);
б) НОК (14; 21).

796. Вычислите:

а) $\frac{3}{20}-\frac{11}{30}$;
б) $\frac{9}{14}+\frac{5}{21}$;
в) $\frac{17}{20}+\frac{19}{30}$;
г) $\frac{16}{21}-\frac{9}{14}$.

797. Сколько натуральных значений может принимать выражение $\frac{3x}{5}$, если $0<x<40$?

798. Сколько ц е л ы х значений может принимать данное выражение, если x — целое число:

а) $\frac{48}{x}$; б) $\frac{x+45}{x}$; в) $\frac{x-36}{x}$; г) $(29 - x) : x$?

Итак, в этом параграфе вы познакомились с *признаками делимости* суммы и разности чисел.

Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и их сумма делится на это число.

Если и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность делится на это число.

799. Решите уравнение:

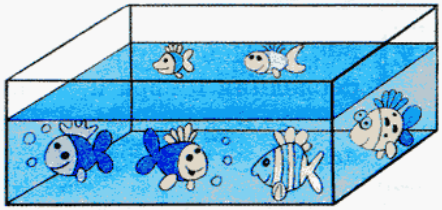
а) $3(x - 2) = x + 2$; в) $5(1 - x) = 2(x - 8)$;
б) $2(x - 3) = 7(2 + x)$; г) $11(5 - 2x) = 3(x + 7)$.

800. Упростите выражение:

а) $5x - (3 + 4x)$; в) $2(3y + 5) - 6(3 - 2y)$;
б) $-(2a + 7) - 5a$; г) $5(6 - b) + 8(3b + 2)$.

801. На двух полках 36 книг. Если с нижней полки переложить 4 книги на верхнюю, то на нижней полке книг окажется в 2 раза меньше, чем на верхней. На какой полке книг больше и на сколько?

802. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, длина которого 6 дм, ширина — 4 дм, а высота — 2,5 дм, наполнен водой на 80%. Когда воду из этого аквариума перелили в другой, длина основания которого 0,8 м, а ширина — 0,2 м, то второй аквариум оказался полностью заполнен водой. Найдите высоту второго аквариума.



803. Месячный заработок матери составляет 85% от заработка отца. Сколько зарабатывает каждый из них, если вместе они получают 17 760 р. в месяц?

804. При выполнении теста Марина решила на 6 задач меньше, чем Саша. Сколько задач решил каждый, если число задач, решенных Мариной, составляет $\frac{7}{9}$ числа задач, решенных Сашей?

805. а) На сколько процентов $\frac{1}{3}$ меньше $\frac{5}{6}$?

б) На сколько процентов $\frac{5}{6}$ больше $\frac{1}{3}$?

в) Какой процент от $\frac{1}{2}$ составляют $\frac{3}{4}$?

г) Какой процент от $\frac{3}{4}$ составляет $\frac{1}{2}$?

806. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Сумма первых трех равна 27. Какова сумма трех последних?

807. Известно, что $0{,}4 \cdot y = 5$. Найдите $4{,}44 \cdot y$.

Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли утверждение: если уменьшаемое делится на некоторое число, а вычитаемое — нет, то разность на это число не делится?
2. Используя признаки делимости суммы и разности, определите, делится ли: а) 27 + 15 на 3; б) 55 – 20 на 5.

§ 28. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ на 2, 5, 10, 4 и 25

808. 1) Используя таблицу умножения, скажите, какой может быть последняя цифра произведения натурального числа на 2; на 5.

2) Какой цифрой оканчивается произведение натурального числа на 10?

809. Пусть k — натуральное число. Используя известные вам свойства делимости, обоснуйте ответы на вопросы.

1) Может ли значение выражения $2k$ оканчиваться нечетной цифрой?

2) Может ли значение выражения $5k$ быть числом, последняя цифра которого не 5 и не 0?

3) Может ли значение выражения $10k$ оканчиваться еще какой-либо цифрой, кроме нуля?

Проверьте себя.

Скорее всего, вы ответили правильно на все три вопроса, которые были заданы в упражнении № 809. Правильный ответ: «Нет». Однако этот ответ надо обосновать.

Рассуждаем следующим образом.

Чтобы доказать, что одно число не делится на другое, достаточно первое число представить в виде суммы, в которой все слагаемые, кроме одного, делятся на второе число.

Любое натуральное число a можно представить в виде суммы некоторого числа десятков и однозначного числа:

$$m \cdot 10 + n.$$

Например, $37 = 30 + 7 = 3 \cdot 10 + 7$; $124 = 120 + 4 = 12 \cdot 10 + 4$; $5733 = 573 \cdot 10 + 3$; $78\,925 = 7892 \cdot 10 + 5$.

Рассмотрим выражение $m \cdot 10 + n$. Здесь n — это не что иное, как последняя цифра в записи числа a. Первое слагаемое, т. е. $m \cdot 10$, делится и на 2, и на 5, и на 10. Значит, делимость числа a на 2, на 5 или на 10 зависит от последней цифры числа a, т. е. от цифры n. Таким образом:

- если последняя цифра числа не делится на 2, то и само число не делится на 2;
- если последняя цифра числа не делится на 5 (а это все цифры, кроме 5 и 0), то и само число не делится на 5;
- если последняя цифра числа не 0, то оно не делится на 10, так как последнее слагаемое в этом случае на 10 не делится.

Теперь можно дать ответ на вопросы 1), 2) и 3).

1) Поскольку число $2k$ четное, т. е. делится на 2, его последняя цифра не может быть нечетной.

2) Число $5k$ кратно 5, значит, его последняя цифра или 0, или 5, и никакой другой быть не может.

3) Так как число $10k$ кратно 10, оно не может оканчиваться никакой другой цифрой, кроме нуля.

810. Укажите, какие из чисел 158, 255, 1290, 183, 735, 176, 890, 4500, 134, 112 кратны числу:

а) 2; б) 5; в) 10; г) и 2, и 5.

У **811.** Сформулируйте признак делимости на 2; на 5; на 10.

Проверьте себя.

Если последняя цифра числа четная, то оно делится на 2.

Если последняя цифра числа 5 или 0, то оно делится на 5.

Если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10.

Итак, на вопрос, когда натуральное число делится на 2, мы отвечаем: тогда, когда последняя цифра числа четная. А в других случаях может ли число делиться на 2? Нет, отвечаем мы, число делится на 2 только тогда, когда последняя цифра числа четная. Обычно математики, учитывая проведенное рассуждение, говорят так: *число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа четная.* Точно так же формулируются и два других признака: *число делится на 5 тогда и только тогда, когда цифра единиц — 0 или 5; число делится на 10 тогда и только тогда, когда цифра единиц — 0.*

До сих пор мы говорили о делимости натуральных чисел. На самом деле все, что мы обсудили, верно для любых целых чисел. Например, число −48 делится на 2, поскольку его цифра единиц четная, а число −1435 делится на 5, поскольку цифра единиц — 5.

812. (Устно.) Определите, значения каких выражений четны:

198 + 256; −532 − 777;
733 + 520; −533 − 777.

Сформулируйте вывод: в каком случае сумма — четное число, а в каком — нечетное.

813. Не выполняя вычислений, определите, каким является значение выражения — четным или нечетным:

а) 612 + 315 + 411; в) 78 + 641 + 96;
б) 52 + 884 + 120; г) 744 + 291 − 345.

814. Запишите:

а) наименьшее натуральное четное число, кратное 5;
б) наибольшее двузначное число, кратное 5.

815. Запишите три последовательных нечетных числа, кратных 5, начиная с наименьшего.

816. Даны числа: 10, 17, 56, 65, 74, 80, 85, 101, 1000. Укажите те из них, которые:

а) кратны одновременно и 2, и 5;
б) кратны 2 и не кратны 5;
в) кратны 5 и не кратны 2;
г) не кратны ни 2, ни 5.

817. (Устно.) Укажите выражения, значения которых кратны 5:

1840 + 1285; 1750 + 98; 2443 + 8560 + 872;
6725 + 1500; 5400 + 158 + 242; 879 + 251 + 730.

Определите, можно ли сократить дробь на 2, на 5 или на 10, и, если можно, сократите ее:

818. а) $\frac{126}{144}$; б) $\frac{73}{86}$; в) $\frac{70}{145}$; г) $\frac{140}{170}$.

819. а) $\frac{78}{87}$; б) $\frac{18}{130}$; в) $\frac{125}{150}$; г) $\frac{152}{216}$.

820. Верно ли утверждение:

- если число делится на 5, то оно делится на 10;
- если число делится на 5, то оно не делится на 2;
- если число делится на 2, то оно не делится на 5;
- если число делится на 10, то оно делится на 5;
- если число делится на 10, то оно делится на 2?

821. Когда Маша пошла в магазин за продуктами, у нее в кошельке были только пятирублевые монеты и десятирублевые купюры. Сможет ли она уплатить ими без сдачи за:

а) 6 кг картофеля по 5 р. за 1 кг;
б) 2 л молока по 12 р. за 1 л и за 1 л кефира стоимостью 11 р.;
в) 0,4 кг сыра по цене 120 р. за кг;
г) 1,5 кг яблок по 20 р. за 1 кг и 0,5 кг орехов по 70 р. за 1 кг?

822. Даны числа: 11, 16, 17, 35, 48, 60, 74, 85, 90. Запишите, какой остаток получится при делении каждого из этих чисел:

а) на 2; б) на 5; в) на 10.

823. Среди данных чисел выберите те, которые при делении на 5 дают одинаковые остатки: 36, 43, 58, 62, 69, 73, 87, 98.

824. Укажите все натуральные двузначные числа, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

825. Укажите наибольшее натуральное число, кратное 5, удовлетворяющее неравенству:

а) $127 < x < 145$; в) $755 \leqslant x < 758$;
б) $255 \leqslant x < 350$; г) $755 < x \leqslant 758$.

826. Укажите наименьшее натуральное число, кратное 5, удовлетворяющее неравенству:

а) $125 < x < 134$; в) $282 \leqslant x < 500$;
б) $258 < x \leqslant 481$; г) $438 < x \leqslant 495$.

827. Запишите все нечетные числа, для которых верно неравенство:

а) $125 \leqslant x \leqslant 137$; в) $271 < a \leqslant 287$;
б) $138 < y < 147$; г) $201 \leqslant b < 215$.

828. Запишите все четные числа, для которых верно неравенство:

а) $398 \leqslant m < 409$; в) $232 < a \leqslant 241$;
б) $157 < y < 161$; г) $555 < n < 557$.

У **829.** 1) Запишите формулу:

а) четного числа; б) нечетного числа.

2) Докажите, что сумма двух нечетных чисел — четное число.

830. Запишите формулу:

а) числа, кратного 5;

б) натурального числа, которое при делении на 5 дает в остатке 1;

в) натурального числа, которое в сумме с натуральным числом, дающим при делении на 5 в остатке 1, дает число, кратное 5.

831. Сколько целых чисел, кратных 5, содержится в числовом промежутке:

а) $(-15; 7)$; б) $[2{,}7; +\infty)$; в) $[-10; 10]$; г) $(-\infty; 0)$?

832. Из интервала $(-4{,}1; 7{,}99)$ выбрали все четные числа и составили из них множество A. Из отрезка $[-10; 19]$ выбрали все числа, кратные 5, и составили из них множество B. В каком множестве, A или B, оказалось больше элементов?

833. а) Натуральные числа a и b при делении на 5 дают одинаковые остатки, не равные нулю. Может ли их сумма быть кратна 5? А разность?

б) Сумма двух натуральных чисел кратна 10. Какими могут быть остатки каждого из них при делении на 10?

834. Сформулируйте признак делимости на 100.

835. Вычислите:

а) $\frac{34}{45} \cdot \frac{30}{72}$; б) $\frac{58}{60} : \frac{290}{700}$; в) $\frac{28}{40} \cdot \frac{140}{84}$; г) $\frac{15}{24} : \frac{35}{46}$.

836. Найдите:

а) НОК (10; 15); б) НОК (10; 12).

837. Вычислите:

а) $\frac{3}{10} + \frac{7}{15}$; б) $\frac{7}{10} - \frac{14}{15}$; в) $\frac{1}{10} + \frac{5}{12}$; г) $\frac{9}{10} - \frac{7}{12}$.

У **838.** 1) Рассмотрите несколько последовательных трехзначных, а потом четырехзначных чисел, кратных 4. Постарайтесь подметить закономерность и сформулируйте признак делимости на 4. Попробуйте его обосновать.

2) Подумайте, каким будет признак делимости на 25, и докажите его.

Проверьте себя.

1) Возьмем числа 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118. На 4 делятся только числа 112 и 116. Замечаем, что двузначные числа 12 и 16 тоже делятся на 4. Теперь возьмем четырехзначные числа 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008. На 4 делятся 2004 и 2008. И опять, смотрите, делятся на 4 числа, образованные двумя последними цифрами: это 04, т. е. 4, и 08, т. е. 8. Вообще имеет место следующий признак делимости на 4: *число, состоящее более чем из двух цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.* Это очень удобный признак. Например, не выполняя деления числа 45 796 на 4, можно сразу сказать, что на 4 оно делится. Почему? Да потому, что делится на 4 число 96. Дело в том, что число 45 796 можно представить в виде $457 \cdot 100 + 96$. И здесь видно, что каждое слагаемое этой суммы делится на 4. Значит, и сумма делится на 4.

2) Сформулируем признак делимости на 25: *число, состоящее из более чем двух цифр, делится на 25 тогда и только тогда, когда делится на 25 число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.* Например, не выполняя деления числа 45 775 на 25, можно сразу сказать, что оно делится на 25, потому что делится на 25 число 75.

839. а) Среди данных чисел выберите те, которые делятся на 4:

752, 754, 833, 1472, 1480, 3714, 3712.

б) Среди данных чисел выберите те, которые делятся на 25:

225, 13 375, 14 540, 213 475, 114 550, 77 645.

840. На координатной плоскости построен квадрат с вершинами в точках $A(10;\ 10)$, $B(10;\ 75)$, $C(65;\ 75)$, $D(65;\ 10)$. Сколько имеется внутри квадрата точек, абсцисса и ордината которых одновременно:

а) кратны 10; б) кратны 5; в) кратны 4; г) кратны 25?

841. Вычислите:

а) $\left(\frac{3}{5}-\frac{19}{25}\right)\cdot 4\frac{11}{16}-(1:1{,}5)\cdot\left(-3\frac{3}{8}\right)$;

б) $\left(\frac{7}{12}+\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{8}{27}\right)+\left(2-3\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{25}{28}$;

в) $\frac{42}{45}:\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{15}\right)-1:\left(3-1\frac{1}{5}\right)$;

г) $\frac{8}{19}\cdot\left(1\frac{7}{8}-\frac{3}{4}+3\frac{5}{8}\right)+\frac{5}{14}:\left(\frac{4}{7}+\frac{11}{14}-1\frac{3}{14}\right)$.

Формула четного числа

$n = 2k$

$n = 2k + 1$

Формула нечетного числа

842. Выполните действия:

а) $-3\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2$;

б) $-8\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{26}\right):\left(-\frac{7}{9}\right)^2$;

в) $\left(1\frac{1}{7}\right)^2:1\frac{19}{21}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$;

г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(-2\frac{17}{32}\right):\frac{9}{16}$.

843. У Миши 51 р., а у Кати 43 р. Часть денег они потратили. Причем Катя потратила столько, сколько осталось у Миши, а у нее осталось 15 р. Сколько денег осталось у Миши?

844. Велосипедист движется со средней скоростью на 10 км/ч большей, чем пешеход. На один и тот же путь велосипедисту требуется 2 часа, а пешеходу — 7. Найдите средние скорости велосипедиста и пешехода.

845. Сумма цифр натурального двузначного числа равна 9. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

846. Решите уравнение:

а) $x \cdot \frac{12}{17} = \frac{28}{51}$; б) $x : \frac{8}{15} = \frac{5}{32}$; в) $\frac{x}{42} = \frac{6}{7}$; г) $\frac{56}{x} = \frac{16}{21}$.

847. Сумма первого и последнего из 6 последовательных натуральных чисел равна 31. Чему равна сумма всех 6 чисел?

848. Найдите x, если $27 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot x$.

849. Какому из чисел $\frac{1}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{19}{7}$ может быть равен y, если известно, что $y = 1 + \frac{1}{x}$, а $x > 1$?

Контрольные задания

1. Сформулируйте признаки делимости на 2, 5, 10.
2. Из чисел 1956, 8375, 41 279, 54 280 выпишите те, которые кратны:
   а) 2; б) 5; в) 10; г) 4; д) 25.

§ 29. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ на 3 и 9

850. 1) Из чисел 125, 159, 297, 264, 171, 122, 462, 184 выпишите отдельно те, которые делятся на 3, и те, которые на 3 не делятся. Найдите сумму цифр каждого числа первой и второй групп, сравните полученные результаты. Какую закономерность вы увидели?

2) Из этого же набора чисел выберите те, которые делятся на 9, и найдите сумму цифр этих чисел. Какое предположение можно сделать?

851. Не выполняя вычислений, а используя только знакомые вам признаки делимости суммы и произведения, докажите, что число 738 делится на 9.

В случае затруднений прочитайте подсказку: представьте это число в виде суммы разрядных слагаемых, постарайтесь изменить полученное выражение так, чтобы хотя бы некоторые слагаемые делились на 9, и продолжите рассуждения.

Проверьте себя.

$738 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 8 = 7 \cdot 99 + 7 + 3 \cdot 9 + 3 + 8 = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (7 + 3 + 8) = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 18.$

Очевидно, что каждое слагаемое в последнем выражении делится на 9, значит, и вся сумма делится на 9.

Объясните, как получено слагаемое 18. Верно ли, что это сумма цифр заданного числа?

852. Не выполняя вычислений, докажите, что число 627 не делится на 9.

У **853.** 1) Не выполняя вычислений, докажите, что число 582 делится на 3.

2) Не выполняя вычислений, определите, делится ли число 582 на 9.

3) Постарайтесь сформулировать признаки делимости на 3 и на 9.

4) Попробуйте доказать признак делимости на 9 для любого трехзначного числа.

В случае затруднений прочитайте подсказку: представьте трехзначное число, где a — цифра сотен, b — цифра десятков и c — цифра единиц, в виде суммы разрядных слагаемых и постарайтесь изменить полученное выражение так, чтобы некоторые слагаемые делились на 9.

Проверьте себя.

Для того чтобы обосновать признак делимости на 9, запишем трехзначное число в виде $100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — цифра десятков и c — цифра единиц этого числа. Тогда:

$100a + 10b + c = 99a + a + 9b + b + c = 99a + 9b + (a + b + c).$

Очевидно, что два первых слагаемых делятся на 9. Значит, если выражение в скобках тоже делится на 9, то и вся сумма делится на 9. Но выражение в скобках — это сумма цифр трехзначного числа. Отсюда следует вывод: если сумма цифр трехзначного числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Самостоятельно проведите аналогичные рассуждения для четырехзначного числа.

Подумайте, справедлив ли этот признак для любого натурального числа.

Постарайтесь, рассуждая таким же образом, обосновать признак делимости на 3.

Итак, в случае верных рассуждений вы должны были получить такие признаки делимости на 3 и на 9:

если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3;

если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Если же сумма цифр числа не делится на 3, то и само число не делится на 3. Поэтому признак делимости числа на 3 обычно формулируют так:

натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма его цифр.

А признак делимости числа на 9 звучит так:

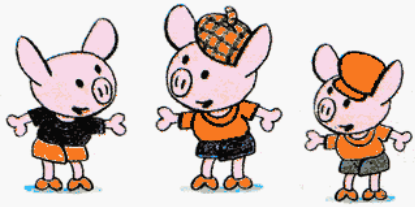
натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда делится на 9 сумма его цифр.

854. (Устно.) Какие цифры можно поставить вместо *, чтобы число:
а) 47*53; б) 713*2; в) 5*682; г) 44*444 — делилось на 3; на 9?

855. Один диспетчер телевизионной компании принял за день 162 заявки на ремонт оборудования, а второй — 108 заявок. Можно ли эти заявки распределить поровну между девятью ремонтными бригадами компании?

856. Зоомагазин в первый день закупил 44 птицы, во второй — 87, а в третий — на 15 птиц меньше, чем во второй. Можно ли этих птиц рассадить поровну в три клетки?

857. Три поросенка: Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф — собрали в лесу желуди и решили разделить их поровну. Удастся ли им это сделать, если Нуф-Нуф собрал 252 желудя, Наф-Наф — в 2 раза больше, а Ниф-Ниф — на 102 желудя меньше, чем Нуф-Нуф?



858. На одной стоянке 27 автомобилей, на другой — на 5 больше, а на третьей — в 2 раза больше, чем на первой. Можно ли все эти автомобили распределить по трем стоянкам так, чтобы автомобилей на них стало поровну?

859. На теплоход требуется погрузить ящики с товаром, которые предварительно устанавливаются в специальные контейнеры. Всего надо погрузить 651 ящик с обувью и 396 ящиков с игрушками, причем все ящики одинакового размера. Можно ли эти ящики упаковать в контейнеры так, чтобы в них не оставалось свободного места, если в каждый контейнер входит по 9 ящиков?

Сократите дробь на 3 или на 9, если это возможно:

860. а) $\frac{48}{57}$; б) $\frac{63}{84}$; в) $\frac{57}{130}$; г) $\frac{375}{735}$; д) $\frac{87}{864}$; е) $\frac{111}{303}$.

861. а) $\frac{168}{201}$; б) $\frac{279}{387}$; в) $\frac{251}{576}$; г) $\frac{144}{153}$; д) $\frac{243}{351}$; е) $\frac{162}{783}$.

Сократите дробь:

862. а) $\frac{354}{438}$; б) $\frac{1710}{1860}$; в) $\frac{216}{324}$; г) $\frac{345}{465}$; д) $\frac{2250}{3105}$; е) $\frac{270}{360}$.

863. а) $\frac{738}{846}$; б) $\frac{405}{480}$; в) $\frac{234}{306}$; г) $\frac{318}{354}$; д) $\frac{324}{648}$; е) $\frac{540}{2790}$.

864. Вычислите:

а) $\frac{72}{56} \cdot \frac{48}{81}$; б) $\frac{585}{648} \cdot \frac{600}{123}$; в) $\frac{162}{225} : \frac{273}{675}$; г) $\frac{960}{540} : \frac{270}{630}$.

865. Укажите трехзначное число:

а) первая цифра которого 2, и оно делится на 9 и на 5, но не делится на 2;

б) первая цифра которого 6, и оно делится на 2, на 5 и на 9.

866. Укажите четырехзначное число:

а) первая цифра которого 7, и оно делится на 3 и на 5, но не делится ни на 2, ни на 9;

б) первая цифра которого 5, и оно делится на 3 и на 2, но не делится ни на 5, ни на 9.

867. На координатной плоскости (рис. 104) построен прямоугольник с вершинами в точках $A(10;\ 10)$, $B(10;\ 75)$, $C(65;\ 75)$, $D(65;\ 10)$. Сколько имеется внутри этого прямоугольника точек, абсцисса и ордината которых удовлетворяют следующим условиям:

а) обе координаты кратны 3;

б) обе координаты кратны 9;

в) абсцисса кратна 3, а ордината кратна 9;

г) абсцисса кратна 9, а ордината кратна 3?

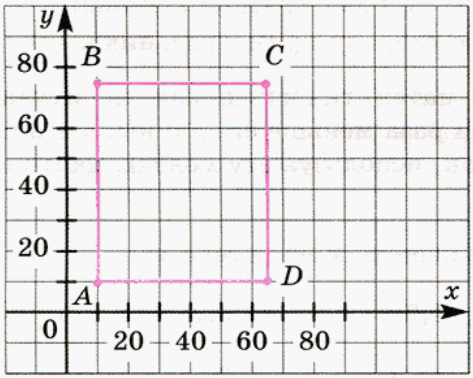


Рис. 104

868. На координатной плоскости построен квадрат с вершинами в точках $A(10;\ 10)$, $B(10;\ 75)$, $C(75;\ 75)$, $D(75;\ 10)$. Сколько имеется внутри квадрата точек, абсцисса и ордината которых удовлетворяют следующим условиям:

а) обе координаты кратны 15;

б) обе координаты кратны 6;

в) абсцисса кратна 4, а ордината кратна 9;

г) абсцисса кратна 6, а ордината кратна 15?

869. Найдите число:

а) $\frac{2}{3}$ которого равны $\frac{3}{4}$ от 240;

б) $\frac{1}{5}$ которого равна $\frac{2}{5}$ от 34;

в) $\frac{7}{9}$ которого равны $\frac{14}{33}$ от 220;

г) $\frac{1}{7}$ которого равна $\frac{2}{35}$ от 150.

870. Вычислите:

а) $24{,}15 : 2{,}3 - 3{,}6 \cdot (17{,}2 \cdot 0{,}125 + 0{,}85) + 2\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$;

б) $3{,}5 \cdot \left(\left(16{,}875 - \frac{2}{3} \cdot 1\frac{5}{16}\right) - \left(0{,}35 + 8\frac{4}{5}\right)\right) \cdot 100$.

871. Одна из сторон прямоугольника площадью 189 см^2 на 12 см больше другой стороны. Составьте уравнение, обозначив через x:

а) меньшую сторону прямоугольника;

б) большую сторону прямоугольника.

872. Составьте математическую модель ситуации: ширина прямоугольника в три раза меньше его длины, а его площадь равна 75 м^2. Догадайтесь, как, используя эту модель, найти стороны прямоугольника.

873. Найдите значение x из равенства:

а) $x : \frac{3}{5} = -1{,}5$;

б) $-4\frac{2}{7} : x = 1\frac{1}{14}$;

в) $11{,}35 : x - 3\frac{1}{8} = 2\frac{3}{4}$;

г) $\frac{3}{4} : x + 4{,}5 = 2{,}4$.

874. Для разравнивания дороги выделены два грейдера различной мощности. Первый грейдер может выполнить всю работу за 12 дней, а второй — за 6 дней. За какое время выполнят работу обе машины, если будут работать одновременно?

875. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из резервуара за 6 ч. Первый насос, работая один, может откачать эту воду за 15 ч. За сколько часов сможет откачать воду из резервуара второй насос, если будет работать только он?

Решите уравнение:

876. а) $15x + 12 = 9 + 3x$;

б) $7 - 15y = 1 + 9y$;

в) $8 + 16x = 5 - 2(x - 3)$;

г) $28 - 19y = 34 + 5(8 - y)$.

877. а) $x + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$;

б) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{3}{8}$;

в) $\frac{3}{10}x - \frac{1}{5} = 1\frac{7}{20}$;

г) $2\frac{3}{5} + 3\frac{2}{5}x = \frac{4}{15}$;

д) $1\frac{3}{7} - \frac{3}{14}x = \frac{5}{7}$;

е) $-1\frac{7}{12} - 1\frac{3}{4}x = \frac{1}{8}$.

878. а) $4x - 15(2 + 3x) = 7 - 24x$; в) $9y + 4(7y - 1) = 32 - 8y$;

б) $\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{5}x = 1\frac{2}{3}$; г) $3\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x = 5{,}4 + 0{,}2$.

Контрольные задания

1. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9.
2. Из чисел 591, 253, 417, 648, 639, 346 выберите те, которые:
   а) кратны 3; б) кратны 9.

§ 30. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

879. Из натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 выпишите те, которые имеют:

1) только один делитель;
2) только два делителя;
3) более двух делителей.

Проверьте себя.

Один делитель	Два делителя	Более двух делителей
1	2, 3, 5, 7 (простые)	4, 6, 8, 9, 10 (составные)

Натуральные числа, имеющие только два делителя, называют **простыми**.

Натуральные числа, имеющие более двух делителей, называют **составными**.

Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

880. Запишите все простые числа большие 10, но меньшие 20.

881. Даны числа: 14, 17, 27, 29, 33, 37, 41, 43, 45, 47, 49. Укажите, какие из них являются:

а) простыми; б) составными.

882. Существуют ли четные простые числа? Сколько их?

883. а) Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?

б) Может ли сумма двух простых чисел, каждое из которых больше 2, быть простым числом?

884. Существуют ли два последовательных натуральных числа, каждое из которых простое? А три?

Следующие упражнения выполните, используя таблицу простых чисел (см. второй форзац учебника).

885. Запишите простые делители числа:

а) 24; б) 30; в) 48; г) 49; д) 52; е) 55.

886. Из следующих чисел выпишите простые числа:

225, 227, 269, 357, 367, 416, 419, 461, 477, 509, 583.

887. Из следующих чисел выпишите составные числа:

431, 437, 467, 587, 667, 677, 703, 713, 739, 899, 907.

888. В таблице простых чисел на форзаце учебника синим цветом выделены *числа-близнецы* — простые числа, между которыми в натуральном ряду чисел находится только одно число.

а) Выпишите три любые пары чисел-близнецов.

б) Укажите последнюю пару чисел-близнецов первой тысячи натуральных чисел.

889. Какой цифрой может оканчиваться многозначное простое число?

890. Сколько составных чисел заключено между числами:

а) 500 и 600; б) 600 и 700; в) 700 и 800; г) 800 и 900?

891. Используя таблицу простых чисел, найдите:

а) три идущих подряд составных числа;

б) пять идущих подряд составных чисел;

в) самый большой интервал между соседними простыми числами из первой сотни натуральных чисел;

г) самый большой интервал между соседними простыми числами среди натуральных чисел от 100 до 200.

892. Укажите все простые числа, для которых верно неравенство:

а) $a < 20$; б) $17 < b \leqslant 37$; в) $31 \leqslant x < 43$; г) $27 \leqslant y \leqslant 29$.

О **893.** m и n — два различных простых числа большие 2. Является ли верным утверждение:

а) их сумма больше, чем 7;
б) их произведение — нечетное число;
в) их произведение — простое число;
г) их разность — четное число?

О **894.** Дано множество чисел: {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40}. Из этого множества наугад выбирается число a. Охарактеризуйте следующее событие как достоверное, невозможное или случайное:

а) a — простое число;
б) a делится на 5;
в) a делится на 10;
г) a — составное число.

О **895.** 25 учеников 6-го класса выписали на доске числа, характеризующие дату их рождения: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Затем они придумали такую игру: объединили в пары тех учеников, даты рождения которых — простые числа, и каждую такую пару назвали *простаками*; объединили в пары тех учеников, даты рождения которых — составные числа, и каждую такую пару назвали *составниками*. Сколько всего получилось простаков и составников? Есть ли в классе хоть один ученик, который не попал ни в простаки, ни в составники?

У **896.** 1) Представьте числа 15, 16, 18, 20, 21, 115, 165 в виде произведения простых чисел.
2) Сравните свои результаты с результатами товарищей. Какую гипотезу можно высказать?

У **897.** Представьте число 3528 в виде произведения простых чисел.

Проверьте себя.

Проще всего это сделать, оформив поиск простых множителей следующим образом:

3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Числа левого столбца получены так: 1764 = 3528 : 2; 882 = 1764 : 2; 441 = 882 : 2; 147 = 441 : 3 и т. д.

Таким образом, $3528 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$.

Вы знаете, что произведение одинаковых множителей можно записать в виде степени:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Здесь n может быть любым натуральным числом, кроме 1, поскольку в произведении никак не меньше двух множителей. Однако всегда делать такое примечание довольно утомительно, поэтому математики договорились считать, что

$$a^1 = a.$$

Используя степени, можно записать, что $3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

Представление числа в виде произведения степеней простых чисел называют **разложением числа на простые множители.**

Как вы уже заметили ранее, разложить число на простые множители можно единственным образом. Вообще справедливо следующее утверждение, которое называют *основной теоремой арифметики*: ***любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители, причем единственным способом.***

При разложении числа на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

У **898.** Разложите на простые множители число:

а) 3780; б) 6468.

Проверьте себя.

а)

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Итак, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

б)

6468	2
3234	2
1617	3
539	7
77	7
11	11
1	

Итак, $6468 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1$.

В обоих случаях мы использовали так называемые *канонические разложения*, когда простые множители располагаются в порядке возрастания.

899. Даны верные равенства:

$1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19$; $19\,125 = 5^3 \cdot 9 \cdot 17$;

$560 = 2^3 \cdot 7 \cdot 10$; $9744 = 2^4 \cdot 21 \cdot 29$.

Укажите, в каких случаях выполнено разложение на простые множители.

Завершите разложение на простые множители в остальных случаях.

900. Разложите данные числа на простые множители:

а) 75, 36, 18, 28, 63, 8, 16, 48;

б) 20, 45, 50, 12, 98, 40, 80, 112.

901. Выполните действие (можно использовать результаты предыдущего задания):

а) $\frac{36}{28} \cdot \frac{8}{63}$; б) $\frac{16}{18} : \frac{48}{75}$; в) $\frac{12}{20} \cdot \frac{45}{50}$; г) $\frac{40}{98} : \frac{80}{112}$.

902. а) Выпишите все делители чисел $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $c = 2^3 \cdot 5$;

б) найдите: НОД $(a; b)$, НОД $(b; c)$, НОД $(a; c)$, НОД $(a; b; c)$;

в) найдите: НОК $(a; b)$, НОК $(b; c)$, НОК $(a; c)$, НОК $(a; b; c)$.

903. Найдите значение выражения при $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $c = 2^3 \cdot 5$:

а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$; в) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

904. a, b, x, y и z — различные простые числа. Запишите все делители произведения:

а) $6ab$; б) $8xyz$.

905. m и n — различные простые числа. Запишите все делители числа a, если:

а) $a = m \cdot n$; б) $a = m^2 \cdot n$; в) $a = m \cdot n^2$; г) $a = m^2 \cdot n^2$.

906. Укажите все двузначные составные числа, разложение которых на простые множители представляет собой:

а) произведение двух одинаковых множителей;

б) произведение трех одинаковых множителей.

907. Разложите на простые множители числа:
а) 375, 108, 196, 135, 225, 175, 392, 875, 253;
б) 735, 525, 882, 1925, 156, 208, 495, 693, 247.

Сократите дробь, используя результаты предыдущего задания:

908. а) $\frac{196}{392}$; б) $\frac{225}{375}$; в) $\frac{108}{135}$; г) $\frac{175}{875}$.

909. а) $\frac{525}{1925}$; б) $\frac{735}{882}$; в) $\frac{495}{693}$; г) $\frac{156}{208}$.

910. Выполните действие:

а) $\frac{196}{225} \cdot \frac{375}{392}$; б) $\frac{108}{175} : \frac{135}{875}$; в) $\frac{208}{495} : \frac{156}{693}$; г) $\frac{525}{735} \cdot \frac{882}{1925}$.

Найдите значение выражения:

911. а) $3\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{25} \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 16$; в) $68\frac{17}{36} : 8\frac{1}{13}$;

б) $1\frac{1}{24} : 3\frac{1}{8} : \frac{8}{15} \cdot 3\frac{7}{9} \cdot 1\frac{15}{17}$; г) $15\frac{7}{24} : 3\frac{7}{120}$.

912. а) $\frac{5}{14} \cdot 1\frac{24}{25} : \frac{7}{12} : 7\frac{1}{5} \cdot 2\frac{7}{10}$; в) $38\frac{19}{80} : 231\frac{4}{5}$;

б) $31\frac{4}{11} : \frac{5}{184} : 138$; г) $8\frac{6}{57} : 12\frac{3}{19}$.

Выполните указанные действия:

913. а) $\left(1\frac{11}{18} + \frac{13}{24} - 1\frac{13}{36}\right) \cdot 1\frac{3}{5}$; в) $4\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} - \frac{7}{18} \cdot 2\frac{2}{3}$;

б) $\frac{14}{15} \cdot 1\frac{3}{7} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{14}$; г) $\left(1\frac{13}{18} - 2\frac{7}{15} - \frac{4}{45}\right) \cdot \frac{1}{2}$.

914. а) $4\frac{2}{7} \cdot \frac{56}{135} \cdot 22\frac{10}{11} \cdot 3\frac{3}{8} \cdot \frac{25}{28}$; в) $\left(1\frac{8}{21} - \frac{19}{42} - 3\frac{5}{28}\right) \cdot \frac{14}{15}$;

б) $\frac{8}{45} \cdot 1\frac{1}{4} - \frac{11}{75} \cdot 2\frac{8}{11}$; г) $-\frac{7}{11} \cdot 1\frac{5}{17} : \left(-1\frac{3}{4}\right)$.

915. Число a четное. Будут ли четными значения выражений $3a$, $5a$?

916. Число m не делится на 5. Значения каких выражений не делятся на 5:
$3m$; $10m$; $18m$; $85m$?

917. Разложите на множители числа 111 и 1001. Вычислите удобным способом:

а) $2 \cdot 3 \cdot 37$; б) $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; в) $7 \cdot 13 \cdot 55$; г) $21 \cdot 37$.

918. Разложите на простые множители число:

а) 350; б) 756; в) 1176; г) 1925.

919. Используя результаты предыдущего задания, сократите дробь:

а) $\frac{350}{1176}$; б) $\frac{350}{756}$; в) $\frac{350}{1925}$; г) $\frac{1176}{1925}$.

О **920.** Найдите произведение и частное дробей, разложив предварительно числитель и знаменатель на простые множители:

а) $\frac{756}{1925} \cdot \frac{350}{1176}$; б) $\frac{350}{756} : \frac{1925}{1176}$; в) $\frac{756}{1176} : \frac{350}{1925}$; г) $\frac{1176}{350} \cdot \frac{1925}{756}$.

О **921.** Вычислите:

а) $\frac{32}{81} \cdot \frac{135}{176}$; б) $\frac{182}{165} \cdot \frac{495}{2548}$; в) $\frac{153}{1960} : \frac{867}{17\,150}$; г) $\frac{437}{1080} : \frac{361}{1008}$.

У **922.** В таблице простых чисел, приведенной на форзаце учебника, найдите самое большое число.
Как вы думаете, есть ли еще какие-нибудь простые числа?

▷ Существует ли самое большое простое число?

Ответ на последний вопрос был найден более 2000 лет назад великим математиком Древней Греции Евклидом. Евклид доказал, что не существует самого большого простого числа. Рассуждал он примерно так. Рассмотрим все простые числа в пределах первой тысячи — они приведены на втором форзаце. Последнее простое число в этом ряду — 997. Рассмотрим произведение всех простых чисел от 2 до 997 и прибавим к этому произведению 1. Получим число $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 997 + 1$. Из-за слагаемого 1 это число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7 и вообще ни на какое простое число от 2 до 997. Но согласно основной теореме арифметики число a либо простое, либо его можно разложить на простые множители. Какие? Другие — не те, что есть в нашей таблице. Значит, в натуральном ряду есть простые числа, выходящие за пределы первой тысячи. Точно так же, выписав все простые числа в пределах от 1000 до 2000, можно доказать, что есть простые числа, выходящие за пределы второй тысячи, и т. д. Вывод: ***простых чисел бесконечно много.***

Выполняя задание № 891, вы обнаружили, что встречаются и 2, и 4, и 6, и 8 и т. д. подряд идущих составных чисел, или, по-другому, расстояние между двумя соседними простыми числами могло быть равно 2 (такие

числа в задании № 888 мы назвали *близнецами*), 4, 6, 8 и т. д. Оказывается, верно следующее утверждение: *расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперед заданного натурального числа.*

Покажем, например, как подобрать 100 подряд идущих составных чисел. Рассмотрим число $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 \cdot 101$. Оно делится на 2, 3, 4, 5, ..., 100, 101. Тогда по свойству делимости суммы число $c + 2$ делится на 2, число $c + 3$ делится на 3, число $c + 4$ — на 4, ..., число $c + 100$ — на 100, число $c + 101$ — на 101. Это значит, что 100 подряд идущих чисел $c + 2$, $c + 3$, $c + 4$, ..., $c + 100$, $c + 101$ — составные. ◁

Найдите значение выражения:

923. а) $(-3)^2$; б) $(-3)^3$; в) -3^2; г) -3^3.

924. а) $(-1)^{500}$; б) $(-1)^{501}$; в) -1^{500}; г) -1^{501}.

925. Найдите значение выражения при $x = \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$:

а) x^2; б) $-x^2$; в) $(-x)^2$; г) $-(x^2)$.

Подумайте, какие из этих выражений равны при любых значениях x.

926. Найдите значение выражения при $x = \frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$:

а) x^3; б) $-x^3$; в) $(-x)^3$; г) $-(x^3)$.

Есть ли среди этих выражений такие, которые при любых значениях x принимают равные значения?

927. Составьте уравнение по условию задачи.

Катер прошел 15 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь маршрут 1 ч 30 мин. Какова скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 19 км/ч?

Подсказка.

1) Обозначьте буквой x скорость течения реки.

2) Выразите: скорость катера по течению; скорость катера против течения; время в пути по течению; время в пути против течения; время, затраченное на весь маршрут.

928. Составьте уравнение по условию задачи.

Теплоход прошел по течению реки 30 км и вернулся обратно, затратив на обратный путь на 20 мин больше, чем на путь по течению реки. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 0,7 км/ч.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа называют простыми, составными? Приведите примеры.
2. Какое натуральное число не является ни простым, ни составным?
3. Разложите, если возможно, на простые множители числа 48, 47, 56, 59. Любое ли составное число можно разложить на простые множители?

§ 31. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

С понятием наибольшего общего делителя (НОД) нескольких натуральных чисел вы знакомы. Почему же мы снова возвращаемся к этому понятию? Дело в том, что для отыскания НОД удобно использовать разложения чисел на простые множители, о чем мы говорили в предыдущем параграфе.

У **929.** 1) Найдите НОД (наибольший общий делитель) чисел 12 и 18, 40 и 100.

2) Каждую пару чисел и их НОД разложите на простые множители. Проанализируйте полученные результаты. Какая связь между разложениями на простые множители чисел и их НОД?

3) Попробуйте сформулировать правило отыскания НОД с использованием разложения чисел на простые множители.

Проверьте себя.

НОД (12; 18) = 6, НОД (40; 100) = 20.

Разложим каждую пару чисел и их НОД на простые множители:

$12 = 2^2 \cdot 3^1$, $18 = 2^1 \cdot 3^2$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $40 = 2^3 \cdot 5^1$,

$6 = 2^1 \cdot 3^1$; $20 = 2^2 \cdot 5^1$.

Если вы рассуждали верно, у вас должно было получиться такое *правило отыскания НОД:*

1. Разложить данные числа на простые множители.
2. Выписать все простые числа, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений.
3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.
4. Записать произведение полученных степеней.

Найдем, руководствуясь этим правилом, НОД (11 088; 13 068).
1. $11\,088 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$; $13\,068 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11^2$.
2. В оба разложения входят простые числа 2, 3, 11.
3. С наименьшими показателями степени — это числа 2^2, 3^2, 11^1.
4. НОД (11 088; 13 068) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396$.

У **930.** Найдите НОД (3780; 7056).

Проверьте себя.
$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$,
НОД (3780; 7056) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

Найдите НОД чисел:

931. а) 350 и 756; в) 756 и 1176;
б) 1176 и 1925; г) 900 и 1183.

932. а) 198 и 1452; в) 528 и 13 068;
б) 405 и 847; г) 525 и 2205.

933. а) 56 и 196; б) 189 и 875; в) 275 и 637; г) 95 и 87.

Сократите дробь:

934. а) $\frac{198}{1452}$; б) $\frac{56}{196}$; в) $\frac{405}{847}$; г) $\frac{189}{875}$.

935. а) $\frac{756}{1176}$; б) $\frac{756}{1925}$; в) $\frac{528}{13\,068}$; г) $\frac{275}{637}$.

Есть натуральные числа, которые обладают интересными свойствами. С некоторыми из таких свойств вы познакомитесь в следующих заданиях.

О **936.** Найдите сумму всех делителей числа 496, не считая его самого. Какое удивительное свойство числа 496 вы заметили? Числа, обладающие таким свойством, называют *совершенными*.

О **937.** Покажите, что каждое из чисел 220 и 284 равно сумме делителей другого (не считая самих чисел). Такие числа называют *дружественными*.

О **938.** Представьте числа 18, 32, 46 в виде суммы простых чисел, постарайтесь, чтобы слагаемых было не более трех. Возьмите сами какое-нибудь двузначное число и постарайтесь представить его в виде суммы трех простых чисел.

939. Если $n > 1$ и каждое из трех натуральных чисел n, $n + 2$, $n + 4$ — простое число, то множество этих трех чисел называют *простой тройкой*. Сколько существует различных простых троек?

940. Из двух городов, расстояние между которыми 216 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовой автомобиль и автобус. Через какое время они встретятся, если скорость автобуса 60 км/ч, а скорость грузовика составляет $\frac{4}{5}$ скорости автобуса?

941. Расстояние между двумя городами автобус проходит за 9 часов, а легковой автомобиль за $\frac{2}{3}$ этого времени. Через какое время они встретятся, если отправятся из этих городов одновременно навстречу друг другу?

942. На математической олимпиаде было предложено решить 12 задач. За каждую правильно решенную задачу засчитывалось 5 очков, а за каждую нерешенную задачу списывалось 3 очка. Сколько задач правильно решил ученик, если он получил за свою работу 36 очков?

943. Маша и Саша покупают одинаковые почтовые наборы. Каждый набор состоит из открытки с конвертом, и его цена выражается целым числом рублей. Маша заплатила за наборы 85 р., а Саша — на 34 р. больше. Сколько стоит один набор? Сколько наборов купила Маша? Сколько наборов купил Саша?

944. Упростите выражение:

а) $(a + 2b) - (4a - b) + 7(b - 2a) - (-b + a)$;
б) $(3x - 7y) + 3(y - 15x) - 2(y + 4x) - (7x - y)$;
в) $(8a - b) - (3a - 5b) + (2a - 7b) - (5a + 2b)$;
г) $-2(3x + 5y - 4) + 3(2x - y + 8)$.

945. Решите уравнение:

а) $3(1 - x) - 5(x + 2) = 1 - 4x$;
б) $(2 + x) \cdot 2 + (4x - 1) \cdot 3 = 10x - 7$;
в) $(4 + 5x) - 3(2 - x) = 16x - 0{,}4$;
г) $2x + 0{,}1 - 4(1 - 4x) = 8x - 4{,}4$.

946. Найдите значение выражения:

а) $\left(0,411 - 1\frac{3}{8} - 1\frac{3}{4}\right) : 0,59$;

б) $\left(1,35 - 6\frac{8}{15}\right) : \left(2\frac{4}{5} + 0,2\right)$;

в) $12,8 \cdot 0,25 : \left(0,125 - \frac{3}{4}\right)$;

г) $\dfrac{\left(1,5 + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot 3,6}{15\frac{1}{8} : 2 - 14}$;

д) $\left(2,7 + 1\frac{1}{3} - 1\frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{53}{67}$;

е) $1\frac{1}{16} : \left(7\frac{2}{5} - 12\frac{3}{8} + 37,525\right)$;

ж) $\left(\frac{3}{7} + 0,7 - \frac{1}{10}\right) \cdot 5\frac{5}{6}$;

з) $\dfrac{\left(1\frac{7}{25} + 12\frac{3}{5} - 8,9\right) \cdot 0,5}{0,2388 : 796}$.

947. Если n и k натуральные числа и $n + k = 2n + 4$, то какие из следующих утверждений заведомо верны:

n — четное число;
k — четное число;
$k - n$ — четное число?

Контрольные задания

1. Объясните, как найти наибольший общий делитель чисел.
2. Найдите НОД (168; 756).
3. Сократите дробь $\frac{168}{756}$.

§ 32. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

В предыдущих параграфах вам встречались числа, наибольший общий делитель которых равен 1. Такие числа называют **взаимно простыми**. Например, взаимно простыми являются числа 35 и 36, хотя каждое из них — составное число. В самом деле, у числа 35 четыре делителя: 1, 5, 7, 35, а у числа 36 девять делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Общих делителей, отличных от 1, у чисел 35 и 36 нет.

У **948.** Выполните задания.

- Приведите примеры взаимно простых чисел.
- Разложите каждое из них на простые множители.
- Подумайте, что характерно для разложений на простые множители взаимно простых чисел.
- Есть ли в этих разложениях одинаковые простые множители?

Проверьте себя.

Разложения на простые множители взаимно простых чисел не содержат одних и тех же простых множителей.

949. Определите, являются ли данные числа взаимно простыми:

а) 35 и 87; б) 54 и 63; в) 15 и 27; г) 34 и 55.

О **950.** Верно ли, что:

а) два соседних натуральных числа всегда взаимно просты;

б) два соседних нечетных числа всегда взаимно просты;

в) два соседних четных числа могут быть взаимно просты?

У **951.** 1) Из чисел 12, 15, 24, 74, 84, 96, 135, 198 выберите те, которые делятся:

а) на 2; б) на 3.

2) Выберите те из них, которые делятся на 2 и на 3 одновременно.

3) Какие из выбранных чисел делятся на 6?

4) Как бы вы сформулировали признак делимости на 6?

У **952.** 1) Из чисел 12, 15, 18, 24, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 66, 72, 108 выберите те, которые делятся:

а) на 6; б) на 9.

2) Выберите те из них, которые делятся на 6 и на 9 одновременно.

3) Какие из выбранных чисел делятся на 54?

4) Можно ли сформулировать признак делимости на 54 так: «Если число делится и на 9, и на 6, то оно делится на 54»?

У **953.** Рассмотрите пары чисел: а) 2 и 3; б) 6 и 9. В какой паре числа взаимно простые, а в какой — нет? Используя результаты заданий № 951 и 952, постарайтесь сформулировать признак делимости на произведение взаимно простых чисел.

Проверьте себя.

Признак делимости на произведение взаимно простых чисел:

если число делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на их произведение.

954. Сформулируйте признаки делимости на 6, на 15, на 18, на 30 и определите, какие из следующих чисел делятся:

а) на 6: 363, 4232, 8336, 9552;
б) на 15: 145, 830, 555, 285;
в) на 18: 852, 1864, 9157, 5562;
г) на 30: 2160, 4970, 1680, 1240.

955. Что можно сказать о числах m и n, если:

а) НОД $(m; n) = n$;
б) НОК $(m; n) = m$?

956. Найдите значение выражения и разложите полученное число на простые множители:

а) $5^2 + 4^2$; б) $6^2 + 8^2$; в) $13^2 - 12^2$; г) $15^2 - 9^2$.

У **957.** 1) Найдите НОК пары чисел:

а) 12 и 18; б) 24 и 18.

2) Каждое число пары и их НОК разложите на простые множители.

3) Проанализируйте полученные результаты. Какая связь между разложениями на простые множители чисел и их НОК?

4) Попробуйте сформулировать правило отыскания НОК с использованием разложения чисел на простые множители.

Проверьте себя.

НОК (12; 18) = 36, НОК (24; 18) = 72.

Разложим данные числа и их НОК на простые множители и проанализируем результаты:

$12 = 2^2 \cdot 3^1$, $18 = 2^1 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$, $18 = 2^1 \cdot 3^2$,

$36 = 2^2 \cdot 3^2$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

В каждом случае в разложение НОК входят все простые множители, имеющиеся в разложениях соответствующих чисел, причем с

наибольшими показателями их степеней. До сих пор мы находили НОК подбором. Теперь можно предположить, что НОК любых чисел можно найти как произведение всех простых множителей, входящих в разложения этих чисел, взятых с наибольшими показателями их степеней.

Подумаем, как можно было бы найти НОК (12; 18) при помощи рассуждений. Из разложений чисел 12 и 18 видно, что НОК (12; 18) должно делиться и на 2^2, и на 3^2. Поскольку эти числа взаимно простые, общее кратное должно делиться и на их произведение. Наименьшим из кратных числа является само это число, значит, НОК (12; 18) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Итак, чтобы найти НОК чисел, надо:

1. Разложить данные числа на простые множители.

2. Выписать все простые числа, которые входят хотя бы в одно из полученных разложений.

3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наибольшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.

4. Записать произведение полученных степеней.

Найдем, руководствуясь этим правилом, НОК (1470; 588).

1. $1470 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$, $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$.

2. В этих разложениях встречаются числа 2, 3, 5, 7.

3. С наибольшими показателями степени — это числа 2^2, 3^1, 5^1, 7^2.

4. НОК (1470; 588) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 2940$.

У **958.** 1) Найдите НОД (56; 196).

2) Найдите НОК (56; 196).

3) Найдите НОД (56; 196) · НОК (56; 196) и произведение 56 · 196. Что вы заметили?

Проверьте себя.

НОД (56; 196) = 28; НОК (56; 196) = 392;

НОД (56; 196) · НОК (56; 196) = 28 · 392 = 10 976,

56 · 196 = 10 976.

Составленные произведения равны.

Вообще *для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство*

$$\text{НОД}\ (a;\ b) \cdot \text{НОК}\ (a;\ b) = ab.$$

Объясним это равенство на примере чисел 56 и 196. Имеем:

$$56 = 2^3 \cdot 7,$$
$$196 = 2^2 \cdot 7^2,$$
$$\text{НОД}\ (56;\ 196) = 2^2 \cdot 7,$$
$$\text{НОК}\ (56;\ 196) = 2^3 \cdot 7^2,$$
$$\text{НОД} \cdot \text{НОК} = (2^2 \cdot 7) \cdot (2^3 \cdot 7^2) = (2^3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 7^2) = 56 \cdot 196.$$

У **959.** Вычислите: $\frac{11}{1470} + \frac{13}{588}$.

Проверьте себя.

Приведем эти дроби к общему знаменателю.

Для того чтобы упростить вычисления, в качестве общего знаменателя обычно берут наименьшее общее кратное знаменателей слагаемых: НОК (1470; 588) = 2940. Чтобы привести к этому знаменателю первую дробь, нужно ее числитель и знаменатель умножить на 2, а числитель и знаменатель второй дроби следует умножить на 5:

$$\frac{11}{1470} + \frac{13}{588} = \frac{11^{\underline{2}}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2} + \frac{13^{\underline{5}}}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2} = \frac{22 + 65}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{87}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2} =$$

$$= \frac{29}{2^2 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{29}{980}.$$

Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

960. а) $\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{24}$; б) $\frac{3}{16}$ и $\frac{5}{24}$; в) $\frac{7}{36}$ и $\frac{7}{60}$; г) $\frac{1}{45}$ и $\frac{11}{60}$.

961. а) $\frac{3}{28}$ и $\frac{17}{42}$; в) $\frac{25}{104}$ и $\frac{37}{520}$; д) $\frac{7}{132}$ и $\frac{9}{154}$;

б) $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$ и $\frac{3}{10}$; г) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{20}$; е) $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{35}$ и $\frac{5}{21}$.

962. а) $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{15}$ и $\frac{9}{20}$; в) $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{3}{40}$ и $\frac{11}{20}$;

б) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{41}{60}$, $\frac{17}{75}$ и $\frac{11}{25}$.

963. Какая из данных дробей наибольшая, а какая — наименьшая:

а) $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$ и $\frac{7}{8}$; б) $\frac{217}{360}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{47}{60}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{11}{18}$ и $\frac{67}{72}$?

964. Расположите числа в порядке возрастания: $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$.

965. Расположите числа в порядке убывания:

а) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{20}{11}$; б) $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{23}{24}$.

Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

966. а) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{35}$; б) $\frac{17}{96}$, $\frac{41}{72}$; в) $\frac{5}{56}$, $\frac{17}{29}$; г) $\frac{5}{17}$, $\frac{9}{13}$.

967. а) $\frac{3}{40}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{9}{88}$; в) $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{52}$, $\frac{1}{91}$; д) $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{8}{45}$;

б) $\frac{11}{18}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$; г) $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{108}$; е) $\frac{5}{51}$, $\frac{9}{34}$, $\frac{1}{6}$.

968. а) $\frac{87}{105}$, $\frac{89}{95}$, $\frac{61}{63}$; б) $\frac{29}{104}$, $\frac{31}{130}$, $\frac{37}{117}$; в) $\frac{23}{78}$, $\frac{19}{117}$, $\frac{5}{338}$.

Вычислите:

969. а) $\frac{9}{13} + \frac{1}{143}$; б) $\frac{7}{20} - \frac{5}{18}$; в) $\frac{1}{64} + \frac{1}{25}$; г) $\frac{21}{22} - \frac{31}{33}$.

970. а) $\frac{1}{33} + \frac{1}{110}$; б) $\frac{33}{56} - \frac{25}{42}$; в) $\frac{7}{30} + \frac{11}{36}$; г) $\frac{1}{78} - \frac{90}{91}$.

971. Расстояние между двумя городами автобус проходит за 2,5 ч. Если увеличить скорость движения автобуса на 10 км/ч, то это же расстояние он пройдет за 2 ч. Найдите расстояние между городами.

972. Разность двух чисел равна 1,6. 10% вычитаемого и 25% уменьшаемого составляют в сумме 7,4. Найдите эти числа.

973. Вычислите:

а) $\left(\frac{5}{18} + \frac{1}{12}\right) \cdot 6 - 2\frac{5}{7}$; в) $\frac{5}{6} - \left(\frac{7}{15} - \frac{17}{20}\right) : 1\frac{1}{45}$;

б) $\left(\frac{5}{14} - \frac{11}{21}\right) \cdot 2 + 3$; г) $-\frac{5}{9} - 1\frac{43}{72} : \left(\frac{7}{24} + \frac{3}{16}\right)$.

974. Со склада в первый день отпустили угля на 12 т, или в 1,3 раза меньше, чем во второй день, а в третий день — 37,5% того, что было отпущено за первые два дня. Сколько тонн угля отпускали каждый день?

975. В поход отправились 20 человек: мужчины, женщины и дети. Вместе они несли груз массой 200 кг. Каждый мужчина нес 20 кг, каждая женщина — 5 кг и каждый из детей — 3 кг. Сколько мужчин, сколько женщин и сколько детей пошли в поход?

976. При каком значении x равны значения выражений:

а) $x + 3{,}2$ и $-3x$;

б) $\frac{3}{4} - x$ и $\frac{3}{24} - 6x$;

в) $x + \frac{1}{15}$ и $\frac{7}{30} - 2x$;

г) $0{,}2 + 3x$ и $-\frac{1}{8} + 4x$?

977. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{3} + 0{,}5\right) \cdot 2\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} - 0{,}3\right) \cdot 3{,}5$;

б) $7 : \left(1\frac{1}{5} - 2{,}2\right) + \frac{1}{10} : \left(2{,}8 - \frac{3}{8}\right)$;

в) $\left(1 - \frac{7}{15} + 0{,}4\right) : \left(8{,}3 + \frac{4}{19} - \frac{15}{38}\right)$;

г) $\left(4{,}25 \cdot \frac{16}{51} - \frac{17}{18} : 8{,}5\right) \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^2$.

978. В магазин привезли 25 ящиков с виноградом трех сортов, причем в каждом ящике лежал виноград только одного сорта. Можно ли утверждать, что среди этих ящиков обязательно найдется 9 таких, в которых лежит виноград одного и того же сорта?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа называют взаимно простыми? Приведите примеры.
2. Сформулируйте признак делимости на произведение.
3. Найдите НОК (156; 234).

ГЛАВА IV МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

§ 33. ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ

Для получения латуни — сплава меди и цинка — на каждые 3 части меди берут 2 части цинка. Так, например, если имеется 3 кг меди, то для изготовления латуни ее надо сплавить с 2 кг цинка. В самом деле, 3 кг — это 3 части, значит, масса одной части — 1 кг, а двух частей — 2 кг. Если же для изготовления сплава берут 6 кг меди, т. е. на одну часть приходится 2 кг, то цинка в нем должно быть 4 кг. Говорят, что в латуни масса меди **относится** к массе цинка как три к двум; пишут: 3 : 2.

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое.

Чаще всего частное записывают в виде отношения тогда, когда хотят показать, сколько частей какого-либо вещества содержится в смеси нескольких веществ.

В математике рассматривают отношение только для положительных чисел.

Отношение записывают при помощи знака деления, например:

$$3 : 2 \text{ или } \frac{3}{2}.$$

Поскольку $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{30}{20} = \frac{1,5}{1}$, отношение 3 : 2 можно записать и в виде 6 : 4, и в виде 30 : 20, и в виде 1,5 : 1 и т. д. (если, конечно, одна из этих записей по каким-либо причинам удобнее записи 3 : 2).

У **979.** 1) Заполните пустые клетки таблицы, учитывая, что медь и цинк берутся для изготовления латуни:

Масса меди, кг	9	12			2,1	
Масса цинка, кг			10	0,6		0,8

2) Запишите отношение числа верхней строки к соответствующему числу нижней строки:

а) в виде частного и найдите его значение;

б) в виде обыкновенной дроби (т. е. дроби, у которой числитель и знаменатель — натуральные числа).

3) Сравните все найденные частные и все полученные дроби. Как можно объяснить полученный результат?

Проверьте себя.

Каждое частное и каждая из полученных дробей должны быть равны 1,5, или $\frac{3}{2}$, поскольку во всех случаях отношение массы меди к массе цинка одно и то же.

980. Прочитайте отношение, запишите его обыкновенной дробью и, если возможно, сократите ее:

а) 15 : 27; б) 45 : 25; в) 8 : 26; г) 36 : 225.

981. Два числа относятся как 7 : 5. Найдите эти числа, если:

а) их сумма равна 48; б) их разность равна 1.

982. Два числа относятся как 2 : 7. Найдите эти числа, если их произведение равно:

а) 14; б) 56; в) 224; г) 18 144.

983. Отношение двух чисел равно $\frac{3}{5}$. Найдите эти числа, если:

а) их сумма равна 16,32;

б) их разность равна 0,35.

984. Мягкий припой — это сплав двух металлов, олова и свинца, которые берутся в отношении 2 : 1. Найдите массу каждого из этих металлов в 26,4 кг припоя.

985. За ремонт станка рабочий и его ученик получили 180 р. Сколько получил каждый, если рабочий получил в 2 раза больше, чем ученик?

986. Сторона квадрата является диаметром окружности. Сделайте рисунок и найдите отношение площадей частей квадрата, на которые его делит окружность.

987. Сплав состоит из меди, олова и сурьмы, взятых в отношении 1 : 2 : 2.

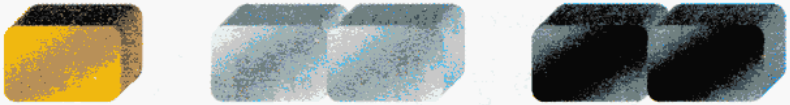
1) Подумайте, какой смысл имеет отношение трех чисел.

2) Определите, сколько нужно взять каждого из этих веществ, чтобы получить 214 кг сплава.

Проверьте себя.

Отношение 1 : 2 : 2 в данной задаче означает, что для получения сплава надо на одну часть меди взять по две части олова и сурьмы. Например, если есть 1 кг меди, то олова и сурьмы для этого сплава надо взять по 2 кг.

Чтобы определить массу каждого их этих веществ, необходимую для получения 214 кг сплава, рассуждаем следующим образом. Для изготовления этого сплава необходимо иметь пять одинаковых по массе частей (рис. 105).



1 часть меди 2 части олова 2 части сурьмы

Рис. 105

Чтобы узнать массу одной части, разделим 214 на 5:

214 : 5 = 42,8 (кг).

Масса двух частей составляет 42,8 · 2 = 85,6 (кг).

Значит, для получения 214 кг сплава надо взять 42,8 кг меди и по 85,6 кг олова и сурьмы.

988. Для изготовления фарфора смешивают белую глину, песок и гипс в отношении 25 : 2 : 1. Определите массу каждого из этих веществ, необходимую для приготовления 700 кг такой смеси.

989. Пять чисел относятся между собой как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Найдите эти числа, зная, что:

а) сумма первого числа и третьего равна 40;

б) разность пятого и второго чисел равна 51.

990. На координатной прямой отмечены точки $A(2)$ и $B(10)$. Найдите координату точки M, расположенной между точками A и B, если известно, что:

а) $AM : MB = 1 : 1$; в) $AM : MB = 1 : 3$;

б) $AM : MB = 3 : 1$; г) $AM : MB = 2{,}5 : 1{,}5$.

991. На координатной прямой отмечены точки $A(2)$ и $B(10)$. Найдите координату точки M, расположенной вне отрезка AB, если известно, что:

а) $AM : MB = 3 : 1$; б) $AM : MB = 1 : 3$.

992. На координатной прямой отмечены точки $A(-1{,}56)$ и $B(5{,}46)$. Найдите координату точки M, если $AM : BM = 1 : 2$ и точка M расположена:

а) между точками A и B; б) слева от точки A.

Может ли точка M располагаться справа от точки B?

993. На координатной прямой отмечены точки $A(-5{,}14)$ и $B(-1{,}39)$. Найдите координату точки M, если $AM : BM = 3 : 2$ и точка M расположена:

а) между точками A и B; б) справа от точки B.

Проверьте справедливость равенства:

994. а) $\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$; б) $\frac{12}{8} = \frac{15}{10}$; в) $\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{1{,}2}{0{,}8}$; г) $\frac{15}{9} = \frac{20}{12}$.

995. а) $9 : 6 = 15 : 10$; б) $12 : 8 = 0{,}9 : 0{,}6$.

Равенства, приведенные в упражнениях 994 и 995, представляют собой верные *равенства двух отношений*. Такие равенства имеют специальное название — **пропорции** (от латинского *pro portio* — на порции, на части).

Итак,

пропорция — это верное равенство двух отношений.

Пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a : b = c : d$ читаются одинаково: «a относится к b, как c относится к d».

996. Прочитайте пропорции, записанные в упражнении 994.

997. Из данных отношений составьте пропорции:

а) $2 : 5$; $6 : 15$; $7 : 2$; $8 : 20$; $21 : 6$;

б) $12 : 4$; $6 : 3$; $6 : 2$; $2 : 1$; $18 : 6$.

998. Из данных чисел составьте пропорцию:

а) 1, 17, 3, 51; б) 10, 15, 24, 16.

999. Составьте две пропорции, у которых каждое из отношений было бы равно 0,2.

У **1000.** В пропорции $a : b = c : d$ числа a и d называют ***крайними***, а числа b и c — ***средними*** членами пропорции. Укажите крайние и средние члены в пропорции $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Проверьте себя.

В пропорции $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ m и q — крайние, n и p — средние члены.

У **1001.** 1) Назовите крайние и средние члены пропорции:

а) $12 : 8 = 0{,}9 : 0{,}6$; в) $\frac{12}{8} = \frac{15}{10}$;

б) $\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$; г) $\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{1{,}2}{0{,}8}$.

2) В каждой пропорции предыдущего пункта найдите произведение крайних и произведение средних членов. Что вы заметили?

Проверьте себя.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Это утверждение верно для любых пропорций, а не только для пропорций из № 1001. Верно и обратное утверждение:

если в записанном равенстве двух отношений произведение крайних членов равно произведению средних членов, то равенство отношений верно, т. е. является пропорцией.

Иными словами, *если для двух отношений* $\boldsymbol{a : b}$ *и* $\boldsymbol{c : d}$ *выполняется равенство* $\boldsymbol{ad = bc}$, *то* $\boldsymbol{a : b = c : d}$ — *пропорция.*

Докажем, что равенство $1{,}7 : 2 = 3{,}4 : 4$ — пропорция.

Произведение крайних членов $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ и произведение средних членов $2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$, т. е. $1{,}7 \cdot 4 = 2 \cdot 3{,}4$. Следовательно, равенство $1{,}7 : 2 = 3{,}4 : 4$ — пропорция.

А вот считать пропорцией запись $\frac{3{,}1}{16{,}5} = \frac{2}{10}$ нельзя, поскольку здесь $3{,}1 \cdot 10 \neq 16{,}5 \cdot 2$. Записанное равенство — это «равенство», т. е. равенство в кавычках. Кавычки в русском языке иногда используют, чтобы показать отрицательное отношение к объекту. Сравните две фразы: *«Иванов — честный человек»* и *«Иванов — “честный” человек»*. В чем их различие?

1002. Используя свойство крайних и средних членов пропорции, проверьте, является ли равенство пропрорцией:

а) $5 : 2\frac{2}{3} = 3 : 1\frac{3}{5}$; в) $1 : 0{,}25 = 0{,}6 : 0{,}15$;

б) $0{,}4 : 0{,}1 = 0{,}16 : 0{,}04$; г) $0{,}1 : 0{,}01 = 0{,}2 : 0{,}02$.

1003. Составьте пропорцию, у которой крайними членами будут числа:

а) 20 и 100; б) 40 и 15; в) 25 и 4; г) 80 и 2.

О **1004.** Составьте две пропорции, у которых каждый из средних членов равен 18.

У **1005.** 1) Подберите какие-нибудь четыре положительных числа так, чтобы произведение первых двух было равно произведению третьего и четвертого.

2) Попробуйте из этих чисел составить пропорцию.

3) Сколько пропорций можно составить из этих чисел?

Проверьте себя.

Возьмем, например, числа 2, 3, 4 и 1,5. Они обладают заданным свойством: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 1{,}5$. Из них можно составить 4 пропорции, для каждой из которых первые два числа будут крайними членами, а третье и четвертое числа — средними членами. Вот эти пропорции:

$2 : 4 = 1{,}5 : 3$; $3 : 4 = 1{,}5 : 2$; $2 : 1{,}5 = 4 : 3$; $3 : 1{,}5 = 4 : 2$.

И еще 4 пропорции можно составить, если использовать первые два числа в качестве средних членов, а третье и четвертое числа — в качестве крайних членов пропорции:

$4 : 2 = 3 : 1{,}5$; $4 : 3 = 2 : 1{,}5$; $1{,}5 : 2 = 3 : 4$; $1{,}5 : 3 = 2 : 4$.

Доказанный нами факт на математическом языке формулируется следующим образом:

если $ab = cd$, то $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$, $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$ и т. д.

С помощью свойства крайних и средних членов пропорции выполните задания № 1006—1009.

1006. Можно ли составить пропорцию из данных чисел:

а) 6, 9, 10, 15; в) 12, 22, 30, 65;

б) 16, 20, 28, 36; г) 2,8, 3,2, 10,5, 12?

1007. Используя равенство, составьте пропорцию:

а) $45 \cdot 2 = 15 \cdot 6$; в) $6 \cdot 8 = 12 \cdot 4$;

б) $8 \cdot 9 = 24 \cdot 3$; г) $2 \cdot 42 = 21 \cdot 4$.

О **1008.** Из данных чисел выберите 4 таких, из которых можно составить пропорцию:

а) 7, 9, 15, 21, 25, 35, 42, 49;

б) 5, 10, 15, 24, 30, 40, 50, 64.

О **1009.** Из данных чисел составьте как можно больше пропорций:

а) 2, 6, 4, 12; в) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{30}$;

б) 9, 1, 9, 81; г) 36, 3, 18, 6.

У **1010.** Верны ли следующие утверждения:

1) если в пропорции крайние члены поставить на место средних, а средние — на место крайних, то получится пропорция;

2) в пропорции можно менять местами средние или крайние члены?

Постарайтесь обосновать свои ответы.

Проверьте себя.

В обоих случаях равенство произведений средних и крайних членов пропорции сохраняется, значит, новое равенство тоже будет пропорцией.

1011. В пропорции переставьте числа так, чтобы снова получилась пропорция:

а) $7 : 8 = 35 : 40$; б) $27 : 12 = 9 : 4$.

У **1012.** Даны тройки чисел:

1) 5, 25, 10; 3) 24, 8, 32;

2) 7, 42, 3; 4) 0,4, 1,6, 8.

Для каждой тройки подберите четвертое число так, чтобы из них можно было составить пропорцию. Запишите пропорцию, в которой это число было бы:

а) средним ее членом; б) крайним ее членом.

Сколько разных чисел можно подобрать для каждой тройки?

Проверьте себя.

Произведение искомого числа на одно из трех данных чисел (можно из них выбрать любое) должно быть равно произведению двух других чисел. Значит, всего можно подобрать три числа. Так, обо-

значив искомое число буквой x, для первой тройки чисел получим три варианта.

1. $5x = 25 \cdot 10$, $x = 50$.

а) $25 : 50 = 5 : 10$; б) $50 : 25 = 10 : 5$.

2. $25x = 5 \cdot 10$, $x = 2$.

а) $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$; б) $\frac{25}{5} = \frac{10}{2}$.

3. $10x = 25 \cdot 5$, $x = 12{,}5$.

а) $25 : 10 = 12{,}5 : 5$; б) $12{,}5 : 25 = 5 : 10$.

Выполняя последнее задание, мы находили неизвестный член пропорции. В математике для такого действия есть специальное название:

найти неизвестный член пропорции — это значит *решить пропорцию*.

Решите пропорцию:

1013. а) $\frac{x}{15} = \frac{1}{3}$; б) $\frac{14}{19} = \frac{x}{76}$; в) $\frac{y}{2{,}3} = \frac{0{,}2}{2{,}76}$; г) $\frac{0{,}7}{3{,}5} = \frac{y}{4{,}02}$.

1014. а) $\frac{16}{x} = \frac{4}{5}$; б) $\frac{22}{35} = \frac{242}{x}$; в) $\frac{0{,}45}{y} = \frac{5}{2{,}7}$; г) $\frac{2{,}5}{0{,}38} = \frac{6{,}5}{y}$.

1015. Пропорции часто приходится решать в процессе приготовления пищи. Так, зная, что объемы крупы и воды при варке каши должны относиться как 1 : 2 (если только это не манная каша), ваши мамы без труда могут сварить кашу, взяв, например, 2 стакана крупы. Сколько стаканов воды потребуется на 2 стакана крупы?

1016. Составьте уравнение по условию задачи.

а) Мастер и его ученик могут выполнить некоторую работу за 17 ч. За какое время ученик один сможет выполнить всю работу, если ему потребуется на это на 20 ч больше, чем мастеру?

б) Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из цистерны за 18 ч. Первый насос мог бы откачать эту воду на 9 ч быстрее, чем второй. За какое время мог бы откачать воду из цистерны каждый из насосов, работая отдельно?

Подсказка.

В первой задаче объем работы, а во второй — объем воды надо принять за единицу.

1017. 25% площади фермерского хозяйства засеяно рожью, 35% — кукурузой, остальная часть — пшеницей, причем пшеницей засеяно на 398 га больше, чем кукурузой.

а) Как относятся площади, засеянные рожью, кукурузой и пшеницей?

б) Найдите площадь фермерского хозяйства.

1018. 35% всех работающих на заводе составляли женщины, 58% — мужчины, остальные 98 человек были подростки-ученики.

а) Найдите отношение числа мужчин, работающих на заводе, к числу подростков-учеников.

б) Сколько мужчин и сколько женщин было среди взрослых рабочих?

1019. Дано четырехзначное число вида $x73y$, где первая и последняя цифры неизвестны. Подберите цифры x и y так, чтобы число $x73y$:

а) было четным; в) делилось на 4;

б) делилось на 5; г) делилось на 9.

В каждом случае подсчитайте количество возможных вариантов решения.

1020. Дано четырехзначное число $x73y$. Подберите цифры x и y так, чтобы число $x73y$:

а) делилось на 45; в) делилось на 36;

б) делилось на 15; г) делилось на 30.

В каждом случае подсчитайте количество возможных вариантов решения.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой смысл имеет утверждение: «В сплаве масса золота относится к массе серебра как 53 : 47»?
2. Что такое пропорция и как называются ее члены? Проверьте, можно ли составить пропорцию из чисел:
   а) 3, 40, 15, 8; б) 18, 25, 42, 10.
3. Решите пропорцию $\frac{14}{27} = \frac{70}{x}$.

§ 34. ДИАГРАММЫ

В таблице приведены данные по основным расходам на одного человека в месяц:

Статья расхода	Сумма, р.	Статья расхода	Сумма, р.
Питание	3000	Хоз. нужды	300
Жилье	600	Развлечения	1000
Одежда	1200	Транспорт	500

Те же данные можно представить в виде **диаграммы.**

Диаграммы используют тогда, когда какую-либо информацию хотят представить наглядно. На рисунках 106—109 информация о распределении расходов дана в виде различных диаграмм.

Если вы внимательно посмотрите на эти рисунки, то сможете найти в них много общего. Постарайтесь рассказать о том, что вы видите на этих рисунках.

На рисунках 111, 112 также изображены диаграммы. Но на них та же информация о распределении расходов представлена немного иначе. Постарайтесь объяснить, в чем основное отличие диаграмм, изображенных на этих рисунках, от предыдущих.

Рис. 106

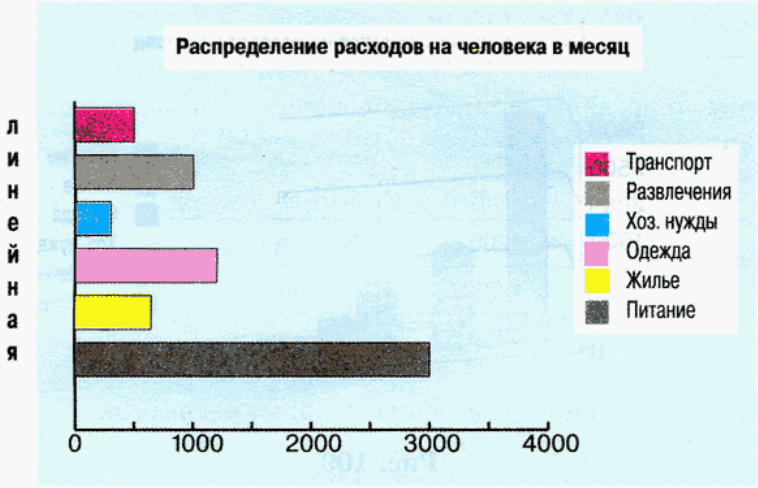


Рис. 107

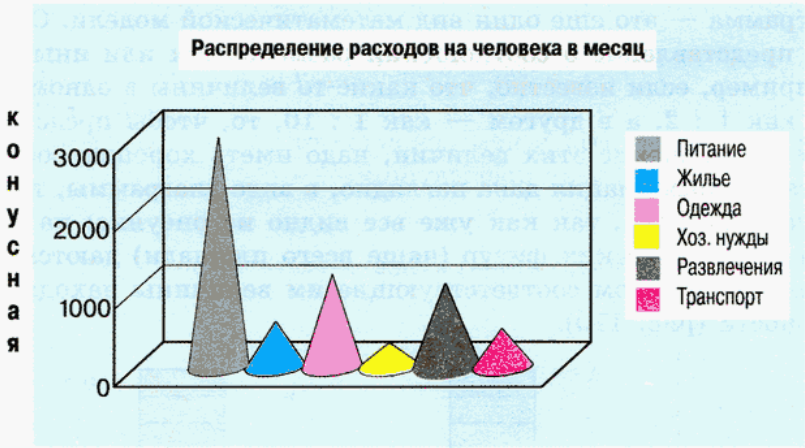


Рис. 108

Итак, какую же информацию можно получить из рассмотренных диаграмм?

На рисунках 105—108 изображены оси, на одной из которых нанесены деления. Если на шкале линейки деления соответствуют единицам длины, то на оси диаграммы расходов они соответствуют рублям. Информация о размере расходов по той или иной статье дается в виде геометрической

цилиндрическая

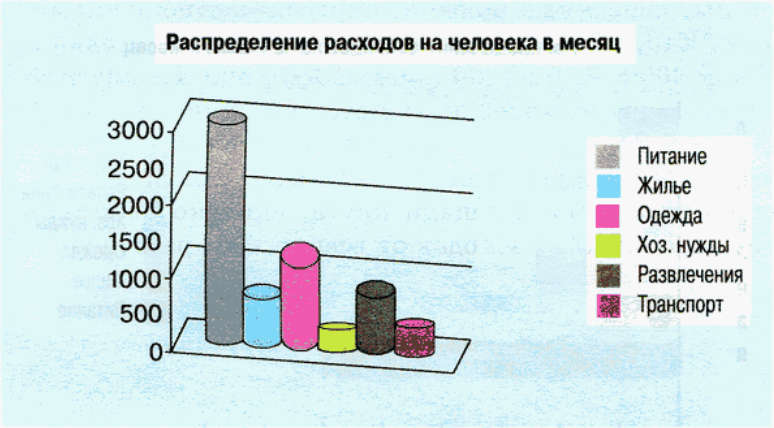


Рис. 109

фигуры, определенная мера которой (высота или длина) соответствует сумме расходов.

Диаграмма — это еще один вид математической модели. Она дает наглядное представление о соотношении размеров тех или иных величин. Так, например, если известно, что какие-то величины в одном случае относятся как 1 : 2, а в другом — как 1 : 10, то, чтобы представить себе реальное соотношение этих величин, надо иметь хорошее воображение. А если та же информация дана наглядно, в виде диаграммы, то представлять ничего не надо, так как уже все видно из рисунка: на диаграмме размеры геометрических фигур (чаще всего площади) даются в том же отношении, в котором соответствующие им величины находятся в действительности (рис. 110).

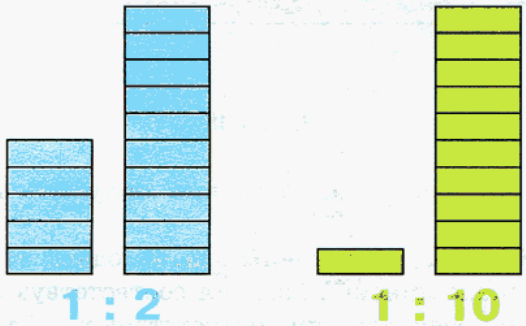


Рис. 110

Величины, связанные более сложными соотношениями, сравнивать еще труднее. Так, в случае с расходами величины, входящие в таблицу, относятся как 3000 : 600 : 1200 : 300 : 1000 : 500. На диаграмме (рис. 111) не указаны размеры расходов по каждой статье, но показано, сколько процентов от общей суммы расходов приходится на каждую из них. Каждой статье соответствует определенная доля круга. Площадь этой доли составляет столько процентов площади круга, сколько процентов составляет соответствующая статья расходов от всей суммы расходов.

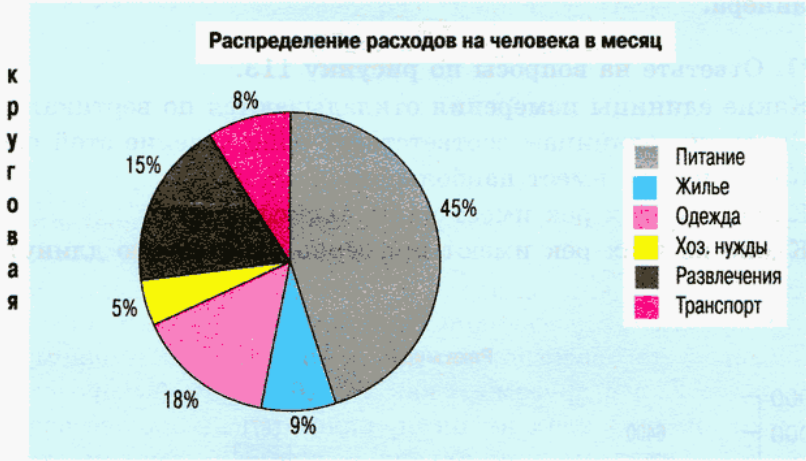


Рис. 111

Рис. 112

Диаграмма на рисунке 112 не содержит никаких числовых данных. Вся информация, которая здесь дается, — это примерное представление о соотношениях между суммами расходов по статьям семейного бюджета. Так, например, из этой диаграммы видно, что на питание уходит гораздо больше средств, чем на транспорт.

Существуют и другие типы диаграмм. Тот или иной тип диаграммы используется в зависимости от требований к уровню информации, которому она должна соответствовать. Что же касается способов оформления диаграммы, то, как говорится, их количество ограничено только фантазией дизайнера.

1021. Ответьте на вопросы по рисунку 113.

- Какие единицы измерения откладываются по вертикальной оси?
- Скольким единицам соответствует одно деление этой оси?
- Какая из рек имеет наибольшую длину?
- Какая из этих рек имеет наименьшую длину?
- Какие из этих рек имеют примерно одинаковую длину?

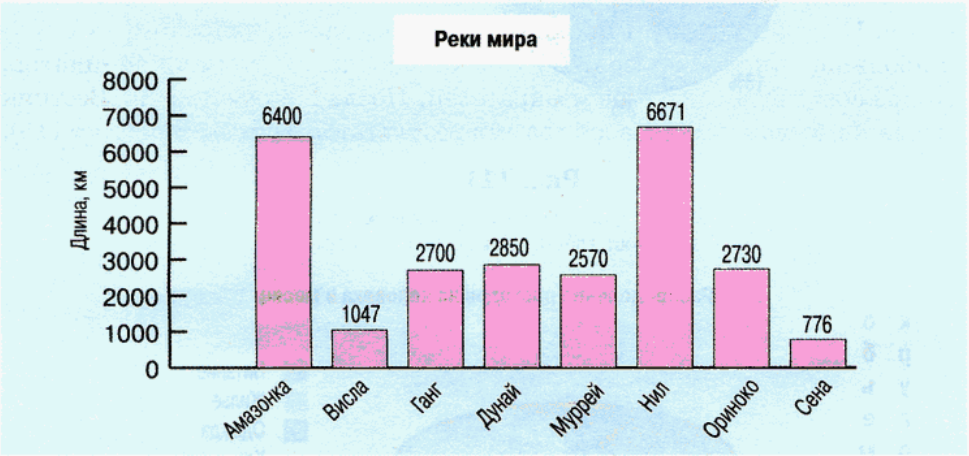


Рис. 113

1022. Ответьте на вопросы по рисунку 114.

а) Кто победил в выборах на пост главы администрации города *N*?

б) Сколько процентов голосов набрал каждый из кандидатов?

Рис. 114

1023. а) По уставу города *K* мэром избирается тот кандидат, который в I туре голосования набрал более 50% голосов избирателей. Если никто из кандидатов не набрал более половины голосов, назначается II тур, в который проходят два кандидата, набравшие в I туре наибольшее число голосов. Во II туре побеждает тот из кандидатов, кто наберет больше голосов избирателей. После I тура в газете «Вестник города *K*» была приведена диаграмма результатов голосования (рис. 115).

Рис. 115

Анализируя эту диаграмму, ответьте на следующие вопросы.

- Кто из кандидатов набрал в I туре наибольшее число голосов?
- Кто из кандидатов набрал наименьшее число голосов?
- Будет ли назначен II тур и если да, то кто из кандидатов в него пройдет?
- Можно ли предположить, кто выиграет выборы во II туре?

б) Ответьте по рисунку 116 на следующие вопросы.

- Сколько процентов голосов набрал каждый из кандидатов?
- Кто из кандидатов не имеет шансов на победу в выборах в этом городе?
- Во II туре выборов имеют право участвовать не более двух кандидатов, набравших в I туре наибольшее количество голосов избирателей. Кто из кандидатов имеет право участвовать во II туре выборов?

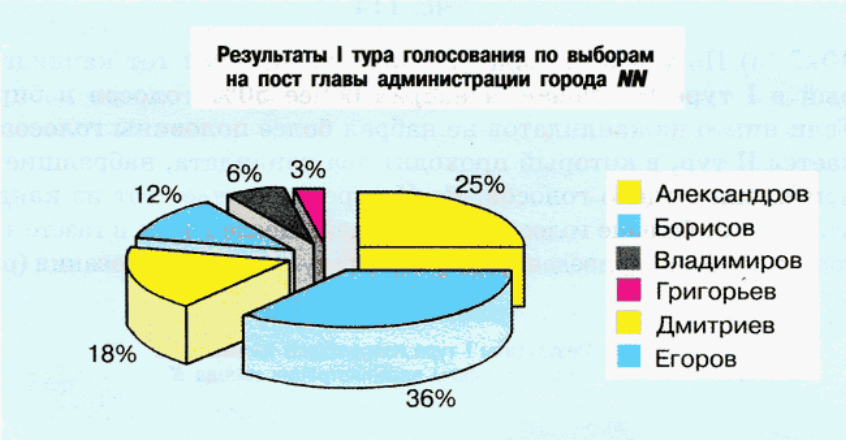


Рис. 116

Составьте диаграммы по следующим данным (№ 1024, 1025). Тип диаграммы выберите самостоятельно.

1024. Диаграмма «Реки Сибири и Дальнего Востока».

Реки Сибири и Дальнего Востока	Енисей	Лена	Обь	Иртыш	Амур	Ангара	Колыма
Длина, км	4102	4400	3650	4248	2824	1779	2129

1025. Диаграмма «Реки европейской части России».

Реки европейской части России	Волга	Москва	Ока	Кама	Нева	Сев. Двина	Печора
Длина, км	3530	473	1500	1805	74	744	1809

1026. Составьте круговую диаграмму «Результаты контрольной работы по математике», используя данные таблицы.

Число учащихся	9	18	7	2
Оценка за контрольную работу	5	4	3	2

На рисунке 117 изображена диаграмма, характеризующая размеры выручки некоторого торгового предприятия по четырем видам товаров: зонты, сумки, перчатки, варежки. Эта диаграмма состоит из четырех рядов данных, соответствующих временам года. По ней можно не только сравнить объемы продаж по разным наименованиям товаров, но и проследить характер их изменения. Так, из диаграммы видно, что зонты наименьшим спросом пользуются зимой и наибольшим спросом — летом, а на перчатки и варежки спрос

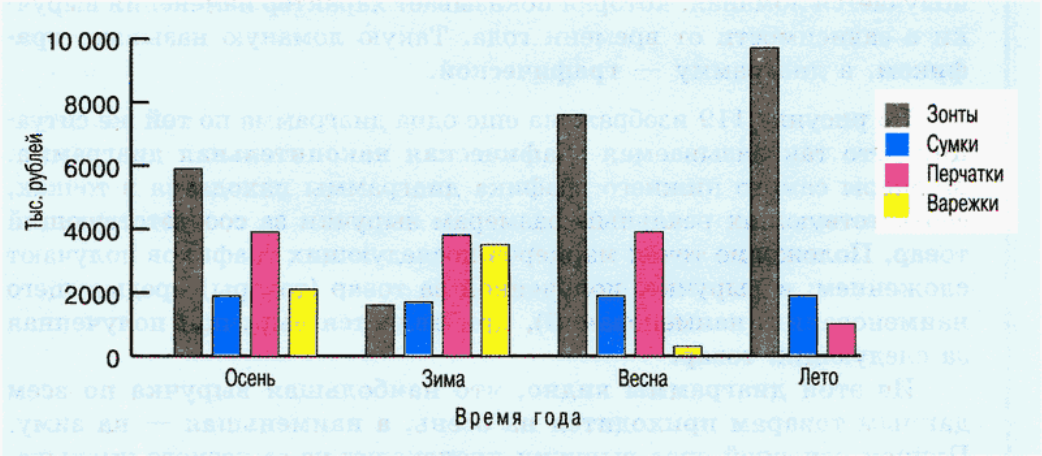


Рис. 117

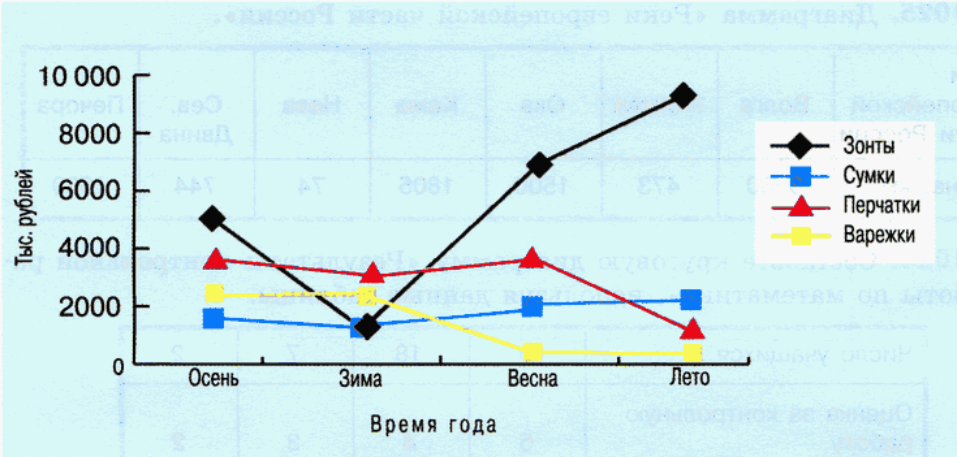


Рис. 118

летом резко падает, причем перчатки в любое время года дают бóльшую выручку, чем варежки. Что же касается сумок, то они продаются примерно одинаково в любое время года.

На рисунке 118 диаграмма отображает ту же ситуацию, что и предыдущая. Но здесь величина выручки за каждый товар в данное время года отмечена маркером определенного цвета и формы. Все однотипные маркеры соединены между собой отрезками. В итоге получается ломаная, которая показывает характер изменения выручки в зависимости от времени года. Такую ломаную называют **графиком**, а диаграмму — **графической**.

На рисунке 119 изображена еще одна диаграмма по той же ситуации. Это так называемая **графическая накопительная** диаграмма. Маркеры самого нижнего графика диаграммы находятся в точках, соответствующих реальным размерам выручки за соответствующий товар. Положение точек маркеров последующих графиков получают сложением: к выручке, полученной за товар (товары) предыдущего наименования (наименований), прибавляется выручка, полученная за следующий товар.

Из этой диаграммы видно, что наибольшая выручка по всем данным товарам приходится на осень, а наименьшая — на зиму. Причем основной спад выручки происходит из-за резкого уменьшения спроса на зонты. Поэтому, для того чтобы сотрудники данного

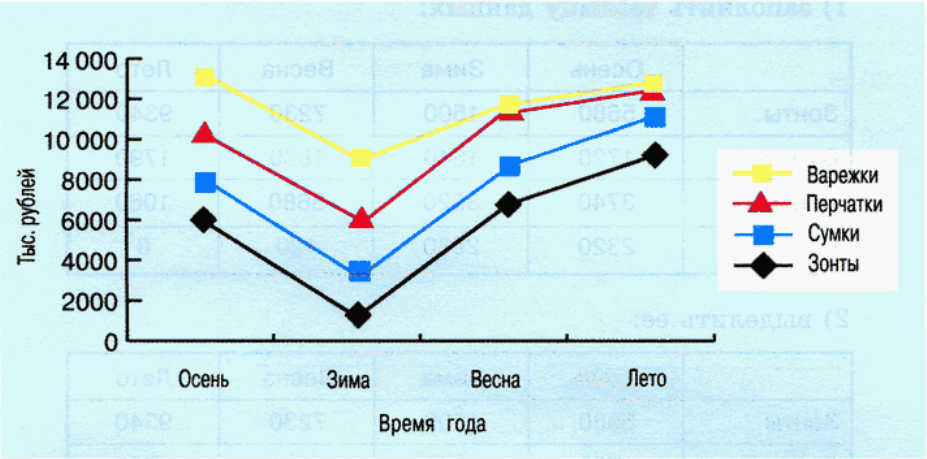


Рис. 119

торгового предприятия получали стабильную заработную плату в течение всего года, необходимо в ассортимент товаров ввести наименования, пользующиеся зимой бóльшим спросом, чем зонты.

1027. Постройте столбчатую диаграмму, отражающую результаты ответов на вопрос «Сколько времени в день вы уделяете чтению художественной литературы?», отмечая по вертикальной оси время, а по горизонтальной — возраст опрашиваемых:

Возраст, лет / Пол	10—15	16—20	21—25	26—30
Мужской	1 ч	1,5 ч	2,3 ч	2,7 ч
Женский	2,5 ч	2,9 ч	1,2 ч	0,8 ч

Проанализируйте построенную диаграмму.

Существуют компьютерные программы, позволяющие строить различные диаграммы автоматически. Наиболее распространенная из них Microsoft Excel (Майкрософт Эксель — редактор формул). Для построения диаграммы в этой программе достаточно:

1) заполнить таблицу данных:

	Осень	Зима	Весна	Лето
Зонты	5680	1500	7230	9340
Сумки	1720	1640	1830	1790
Перчатки	3740	3520	3680	1060
Варежки	2320	2980	120	0

2) выделить ее:

	Осень	Зима	Весна	Лето
Зонты	5680	1500	7230	9340
Сумки	1720	1640	1830	1790
Перчатки	3740	3520	3680	1060
Варежки	2320	2980	120	0

3) подвести указатель мыши к кнопке «Мастер диаграмм» и щелкнуть *левой* клавишей.

После этого появится окно, в котором можно выбрать тип диаграммы.

Затем пользователь, выбирая последовательно нужные команды, получает типовую диаграмму, которую он может оформить (раскрасить, выбрать тип обрамления, размер и тип шрифта и т. д.) по своему вкусу. Для этого достаточно подвести указатель мыши к нужной области изображенной диаграммы и щелкнуть *правой* клавишей. В появившемся меню выбирается опция «Формат ...(*области*)», на ней щелкают *левой* клавишей и в появившемся окне получают возможность выбрать нужное оформление. Попробуйте с помощью компьютера построить диаграммы для тех ситуаций, которые даны в заданиях этого параграфа.

1028. Вычислите:

а) $\left(\frac{165}{182}+\frac{114}{273}\right)\cdot\frac{91}{186}$;

б) $\left(\frac{55}{57}-\frac{51}{95}\right):\frac{129}{133}$;

в) $1\frac{281}{357}\cdot\left(\frac{56}{145}-\frac{49}{318}\right)$;

г) $\left(-\frac{60}{259}\right):\left(-\frac{45}{148}+\frac{75}{222}\right)$.

1029. Решите уравнение:

а) $\frac{3}{4}x + 0,24 = \frac{2}{7}x - 1,06$;

б) $\frac{2}{11}x + \frac{5}{14} = 0,45x + 1,2$;

в) $\frac{2}{35} - 2,9x = 0,8x - \frac{3}{14}$;

г) $-0,21x - \frac{15}{56} = \frac{3}{16} + \frac{257}{800}x$.

Контрольные задания

1. Составьте диаграмму «Расходы на продукты».

Вид продуктов	Молочные (молоко, кефир, масло, сыр, творог и т. п.)	Мясные (мясо, птица, колбаса, сосиски и т. п.)	Рыбные (рыба, филе, консервы и т. п.)	Мучные (хлеб, мука, крупы)	Кондитерские изделия	Овощи и фрукты
Сумма, р.	522	810	558	180	465	585

2. В выборах на пост главы администрации принимали участие кандидаты A, B, C, D, E и F. Используя диаграмму распределения голосов избирателей (рис. 120), определите, кто из кандидатов проходит во второй тур голосования.

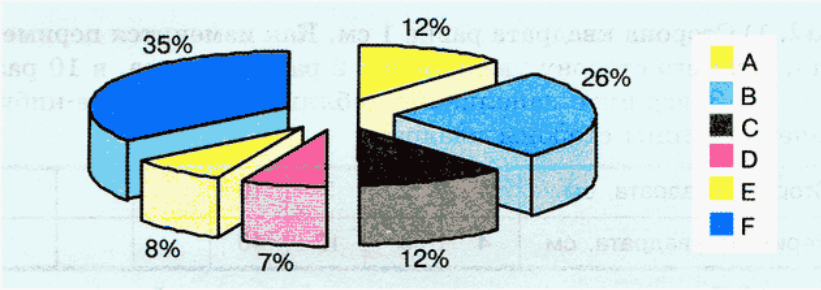


Рис. 120

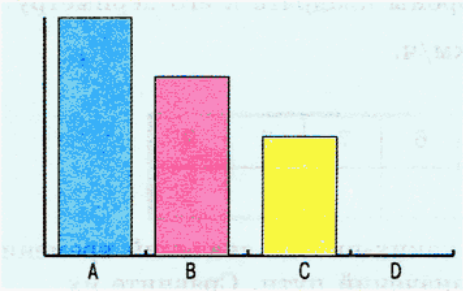


Рис. 121

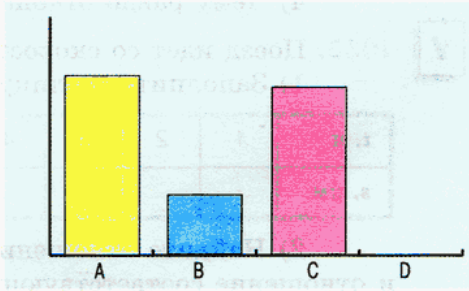


Рис. 122

3. По телевидению шла игра «Кто хочет стать миллионером?». Ведущий задал игроку вопрос и предложил на выбор 4 варианта ответа: A, B, C, D.

Игрок затруднился с ответом и воспользовался подсказкой «Помощь зала», для чего зрители в зале на своих пультах нажали ту кнопку, которая, по их мнению, соответствует правильному ответу. Обобщив данные, компьютер выдал на дисплее диаграмму.

Какой вариант ответа и почему выберет игрок, глядя на диаграмму (рис. 121)? А что бы вы посоветовали игроку, если бы диаграмма имела такой вид, какой представлен на рисунке 122?

§ 35. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ВЕЛИЧИН

1030. (Устно.) За некоторое время самолет пролетел 160 км. Сколько километров он сможет пролететь, если будет лететь с той же скоростью, но в 2 раза дольше?

1031. (Устно.) За краску для ремонта квартиры заплатили 250 р. Сколько пришлось бы заплатить за краску, если бы ее потребовалось в 3 раза больше?

У **1032.** 1) Сторона квадрата равна 1 см. Как изменится периметр квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза, в 3 раза, в 10 раз?

2) Завершите заполнение таблицы, взяв какие-нибудь свои значения длины стороны квадрата:

Сторона квадрата, см	1	2	3	10			
Периметр квадрата, см	4	8	12	40			

3) Рассмотрите отношения двух каких-нибудь длин сторон и отношение соответствующих им периметров. Сравните их.

4) Чему равно отношение стороны квадрата к его периметру?

У **1033.** Поезд идет со скоростью 80 км/ч.

1) Заполните таблицу.

t, ч	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s, км									

2) Найдите отношения двух каких-нибудь значений времени и отношение соответствующих им значений пути. Сравните их.

3) Чему равно отношение времени к пройденному пути?

Решая эти задачи, вы заметили, что *при увеличении одной из величин в несколько раз другая величина увеличивается во столько же раз*. Поскольку отношения значений величин при этом остаются постоянными, любые две пары значений этих величин составляют пропорцию. Такие величины называют **пропорциональными**.

Говорят, что *периметр квадрата пропорционален его стороне*, а *пройденный путь пропорционален времени движения* (когда скорость постоянна).

1034. Пропорциональны ли следующие величины:

а) сторона прямоугольника и его площадь при условии, что вторая сторона прямоугольника неизменна;

б) сторона квадрата и его площадь;

в) ребро куба и его объем;

г) количество купленного товара и его стоимость?

Подсказка.

В случае затруднений ответьте на следующие вопросы:

а) Как изменится площадь прямоугольника, если одну из его сторон увеличить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?

б) Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?

в) Как изменится объем куба, если его ребро увеличить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?

г) Как изменится стоимость товара, если его количество увеличить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?

У **1035.** Раствор для укладки кирпича состоит из цемента, песка и воды. На одно ведро цемента берут одно ведро воды и два ведра песка, т. е. цемент, воду и песок берут в отношении 1 : 1 : 2 (по объему).

1) Сколько надо взять ведер воды и песка на 2 ведра цемента; на 5 ведер цемента? Запишите соответствующие отношения.

2) Можно ли сказать, что это одно и то же отношение?

3) Как понимать утверждение, что объемы воды, песка и цемента, которые берут для приготовления раствора, являются пропорциональными величинами?

Проверьте себя.

1) 2 : 2 : 4, 5 : 5 : 10.

2) Можно сказать, что это одно и то же отношение, поскольку в обоих случаях на одну часть цемента приходится одна часть воды и две части песка.

3) Пропорциональность трех указанных величин означает, что они *попарно* пропорциональны, т. е. объем цемента пропорционален объему песка и пропорционален объему воды, а объем песка пропорционален объему воды.

1036. Призовой фонд соревнований по биатлону делится между участниками, занявшими 1-е, 2-е и 3-е места, в отношении 7 : 2 : 1.

а) Найдите суммы, которые получат спортсмены, занявшие 1-е и 2-е призовые места, если спортсмен, занявший 3-е место, получит 3500 р.

б) Найдите суммы, которые получат спортсмены, занявшие 1-е и 3-е призовые места, если спортсмен, занявший 2-е место, получит 7200 р.

в) Найдите суммы, которые получат спортсмены, занявшие 2-е и 3-е призовые места, если спортсмен, занявший 1-е место, получит 28 700 р.

У **1037.** 1) Расстояние 240 км грузовик проехал за 3 ч.

а) С какой скоростью двигался грузовик?

б) Какова скорость спортивного автомобиля, которому на такое же расстояние потребовалось в два раза меньше времени?

в) С какой скоростью ехал велосипедист, если у него этот путь занял в 5 раз больше времени, чем у грузовика?

2) На 160 р. можно купить 5 кг апельсинов.

а) Сколько килограммов моркови можно купить на эти деньги, если морковь в 4 раза дешевле апельсинов?

б) Сколько килограммов рыбного филе, которое в 2 раза дороже апельсинов, можно купить на эти деньги?

У **1038.** 1) Расстояние между двумя городами равно 900 км. За какое время можно добраться из одного города в другой? Заполните таблицу.

Скорость движения, км/ч	15	30	45	60	90
Время в пути, ч					

2) Запишите отношения двух каких-нибудь значений скорости и соответствующих им значений времени в виде обыкновенных дробей и сократите их. Что можно сказать о числах, которые у вас получились?

3) Чему равно произведение чисел верхней и нижней строк, расположенных в одном столбце?

Проверьте себя.

2) Если взять отношение значений скорости, например, $\frac{45}{60}$, то отношение соответствующих им значений времени равно $\frac{20}{15}$. Отношение значений скорости и отношение соответствующих им значений времени — взаимно обратные числа: $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$, а $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

3) Для любой пары соответствующих друг другу значений скорости и времени их произведение равно 900.

Такие величины, как скорость и время, за которое можно проехать данное расстояние, называют *обратно пропорциональными*. Вообще **обратно пропорциональными величинами** называют такие величины, произведение которых постоянно.

Вы встречались и с другим примером обратно пропорциональных величин: ценой товара и его количеством, которое можно купить на данную сумму денег (как видите, здесь опять произведение величин — цены товара и его количества — постоянно, оно определяется заданной суммой денег). Отметим важное свойство обратно пропорциональных величин:
при увеличении одной из обратно пропорциональных величин в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

Чтобы подчеркнуть разницу между пропорциональными и обратно пропорциональными величинами, пропорциональные величины часто называют **прямо пропорциональными**.

Сравните две следующие задачи. Что в них общего? Чем они отличаются? В какой задаче рассматриваются прямо пропорциональные, а в какой — обратно пропорциональные величины?

1039. Необходимо изготовить 1000 одинаковых деталей. Заполните таблицу и, используя ее данные, составьте три пропорции.

Производительность труда (количество деталей, которые могут быть изготовлены за 1 ч)	50	100	200	250	400	500
Время выполнения работы, ч						

1040. Производительность труда рабочего — 70 деталей в час. Заполните таблицу и, используя ее данные, составьте три пропорции.

Время выполнения работы, ч	1	2	3	4	5	6
Объем выполненной работы, детали						

1041. Какие из следующих пар величин являются прямо пропорциональными, какие — обратно пропорциональными, а какие не являются ни теми, ни другими:

- количество товара и его стоимость;
- скорость движения и время, необходимое для преодоления данного расстояния;
- производительность труда и время выполнения определенной работы;
- масса воды и ее объем;
- скорость движения и длина пути, пройденного за определенное время;
- длина и ширина прямоугольника данной площади;
- сторона квадрата и его площадь;
- ребро куба и его объем;
- рост человека и его возраст;
- масса коробки с конфетами и число конфет в этой коробке;
- число решенных дома примеров и оценка, полученная за контрольную работу;
- число верно решенных заданий контрольной работы и отметка, полученная за нее?

1042. Туристы планировали пройти маршрут за 6 дней, но из-за плохой погоды им пришлось двигаться медленнее, и вместо предполагаемых 52 км в день они проходили только 39 км. За сколько дней они совершили весь переход?

Вычислите значение выражения:

1043. $\dfrac{95 \cdot 0{,}007 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}0014}{1{,}15 \cdot 4{,}9 \cdot 0{,}19} - \dfrac{0{,}39 \cdot 0{,}11 \cdot 72 \cdot 0{,}04}{1{,}8 \cdot 7{,}8 \cdot 0{,}44}$.

1044. $\left(\dfrac{2{,}781}{2{,}06} + \dfrac{7{,}825}{3{,}13} + \dfrac{3{,}885}{1{,}85} + \dfrac{4{,}578}{3{,}27}\right) \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25.$

1045. $\left(\dfrac{11-10{,}2175}{11-7{,}87}+\dfrac{0{,}07\cdot 0{,}5+2{,}746}{1{,}52+3{,}89-6{,}7\cdot 0{,}5}\right):(6{,}5-7).$

1046. а) Стиральная машина стоит 9384 р., включая доставку на дом. Стоимость доставки составляет 2% стоимости машины. Определите цену машины и стоимость доставки.

б) Ремонт автомобиля обошелся в 1498 р., причем плата за работу составила 7% от суммы, затраченной на детали. Определите стоимость деталей и работы.

1047. Решите уравнение:

а) $\dfrac{12}{17}\cdot t=\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{24}{51}$; б) $\dfrac{18}{25}\cdot\dfrac{6}{35}=t\cdot\dfrac{27}{175}$; в) $t\cdot\dfrac{8}{13}=\dfrac{28}{91}\cdot\dfrac{6}{7}$.

1048. а) $\dfrac{3x+2}{4}+\dfrac{2x-5}{3}=-1$; б) $\dfrac{5-2x}{2}-\dfrac{1-3x}{5}=2$.

1049. Из пункта A в пункт B одновременно выехали автомобилист и велосипедист, причем скорость автомобилиста в 5 раз превышала скорость велосипедиста. Однако на полпути автомобиль сломался, и далее автомобилист до пункта B добирался пешком со скоростью вдвое меньшей скорости велосипедиста. Удалось ли автомобилисту прибыть в пункт B раньше велосипедиста?

1050. Числа a и b целые, $a+b=100$. Может ли сумма $6a+3b$ быть равной 639?

1051. Сделайте рисунок, опровергающий утверждение:

а) если луч образует со сторонами угла равные углы, то он является биссектрисой этого угла;

б) если два угла имеют общую вершину, а их биссектрисы вместе составляют прямую, то эти углы вертикальные;

в) если биссектрисы двух равных углов лежат на одной прямой, то эти углы вертикальные.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие величины называют пропорциональными? Почему их иногда называют прямо пропорциональными? Чем отличаются прямо и обратно пропорциональные величины?

2. Какие из следующих величин являются прямо пропорциональными, обратно пропорциональными, а какие не являются ни теми, ни другими:
- масса учебников и их количество (имеется в виду учебник определенного наименования);
- средняя скорость движения и проделанный за определенное время путь;
- время движения и путь, проделанный с определенной скоростью;
- средняя скорость движения и время на преодоление определенного расстояния;
- рост человека и его масса;
- высота предмета в данной точке и длина тени, которую он отбрасывает в 14 ч при ясной погоде?

§ 36. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОПОРЦИЙ

У **1052.** За 6 кг товара заплатили 420 р. Какова стоимость 20,4 кг этого товара?

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1) О каких величинах идет речь в задаче? Есть ли среди них пропорциональные или обратно пропорциональные величины?

2) Обозначьте стоимость 20,4 кг товара буквой x и составьте уравнение.

3) Решите полученное уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Проверьте себя.

Эту задачу нетрудно решить, узнав стоимость 1 кг (цену) товара и умножив полученный результат на 20,4. Однако масса товара и его стоимость — величины пропорциональные, поэтому в решении можно использовать пропорцию.

Сделаем краткую запись условия в таком виде:

6 кг —— 420 р.
20,4 кг —— x р.

От этой записи совсем просто перейти к пропорции:

$$\frac{6}{420} = \frac{20,4}{x},$$

$$x = \frac{420 \cdot 20,4}{6},$$

$$x = 1428 \text{ (р.)}.$$

Ответ: 1428 р.

1053. 16 солдат могут отрыть окоп полного профиля за 21 ч. Сколько солдат нужно поставить на эту работу, чтобы окоп был готов через 14 ч?

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1) О каких величинах идет речь в задаче? Есть ли среди них пропорциональные или обратно пропорциональные величины?

2) Обозначьте искомое число солдат буквой x и составьте уравнение.

3) Решите полученное уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Проверьте себя.

Продолжительность работы и число солдат при одинаковой производительности труда каждого солдата — величины обратно пропорциональные. Запишем краткое условие задачи:

16 с. —— 21 ч

x с. —— 14 ч

В задачах с пропорциональными величинами мы составляем пропорцию. А вот в задачах с обратно пропорциональными величинами удобнее пользоваться равенством произведений соответствующих друг другу значений величин:

$$16 \cdot 21 = x \cdot 14,$$

$$x = \frac{16 \cdot 21}{14},$$

$$x = 24 \text{ (с.)}.$$

Ответ: 24 солдата.

Прочитайте задачу, определите, пропорциональны или обратно пропорциональны величины, о которых в ней идет речь, запишите краткое условие, составьте уравнение и решите его.

1054. На изготовление 12 костюмов требуется 49,8 м ткани. Сколько таких же костюмов можно сшить из 74,7 м той же ткани?

1055. Для погрузки нефти нужно 35 цистерн емкостью 60 м^3 каждая. Однако на железной дороге оказались только цистерны емкостью 70 м^3. Сколько таких цистерн потребуется для погрузки того же количества нефти?

1056. Для окраски 15 м^2 пола израсходовано 1,5 кг эмали. Сколько эмали потребуется для окраски пола в комнате, размеры которой 6,3 × 4,5 м?

1057. На изготовление 3,5 кг ржаного хлеба требуется 2,5 кг муки. Сколько хлеба можно испечь из 17,5 т ржаной муки?

1058. 12 тракторов одинаковой мощности могут вспахать поле за 88 ч. Сколько нужно таких же тракторов, чтобы вспахать это поле за 33 ч?

1059. Для покрытия пола требуется 45 м линолеума шириной 2,2 м. Сколько потребуется линолеума шириной 1,5 м для покрытия пола той же площади?

1060. Маятник стенных часов совершает 198 колебаний за 3,3 мин. Сколько колебаний он сделает за 3 мин 12 с?

1061. Из 79 л молока получается 3,2 кг сливочного масла. Сколько нужно взять молока, чтобы получить 16 кг масла?

1062. Из 0,3 т свежих яблок получилось 57 кг сушеных. Сколько получится сушеных яблок из 2,1 т свежих?

1063. Зубчатое колесо имеет 75 зубцов и делает 92 оборота в минуту. Сколько оборотов в минуту делает колесо с 5 зубцами, сцепленное с первым?

1064. Два шкива связаны ременной передачей. Длина окружности одного шкива равна 528 см, а другого — 225 см. Первый шкив делает 60 оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту делает второй шкив?

1065. Из 100 кг ржи получили 90 кг муки. Сколько ржи надо заготовить, чтобы получить 675 кг муки?

1066. Вычислите:

а) $\dfrac{27\frac{3}{8} - 21\frac{7}{20}}{\left(3\frac{4}{7} - 1\frac{23}{28}\right) - \left(1\frac{47}{65} - \frac{29}{130}\right)}$; б) $\dfrac{4\frac{2}{5} - 3\frac{2}{4} + 8\frac{7}{15} - 8\frac{7}{60}}{2\frac{3}{4} - 4\frac{1}{4}}$.

1067. Отметьте на координатной плоскости точки с координатами (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), (5; 10). Ответьте на вопросы и выполните задания.

- Какую особенность можно отметить в расположении точек?

- Определите, чему равно отношение ординаты к абсциссе для каждой из данных точек.
- Можно ли утверждать, что в данном случае ордината и абсцисса — пропорциональные величины?
- Запишите формулу, по которой можно определить ординату каждой из данных точек, зная ее абсциссу. Подходит ли эта формула для начала координат?
- Укажите несколько точек, отрицательные ординаты которых могут быть найдены по той же формуле.

1068. Налог на добавленную стоимость (НДС) составляет 18% стоимости товара. Определите сумму налога с товара, который был продан за 53 336 р.

1069. а) На бутылке воды написано: «Теперь на 20% дешевле — 0,6 л по цене 0,5 л». На сколько процентов дешевле стала продаваться вода на самом деле?

б) При выпаривании 150 г солевого раствора осталось 12 г соли. Определите концентрацию соли в растворе.

1070. В классе 23 мальчика и 15 девочек. Вычислите с точностью до 0,1%, сколько процентов составляют отдельно мальчики и девочки от общего числа учащихся класса.
Произведите такой же подсчет для вашего класса.

1071. Сравните площади закрашенных фигур (рис. 123) (на правом рисунке вершины квадрата — центры окружностей). Выполните необходимые измерения и найдите площадь закрашенной части каждой фигуры.

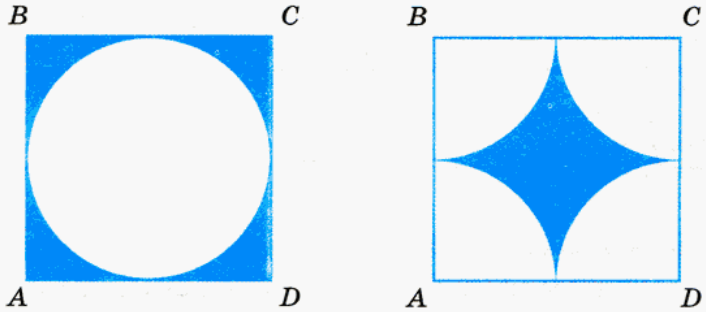


Рис. 123

1072. Для определения чистоты посевного материала были взяты две пробы по 50 г. В первой пробе было 0,8 г сорных и 0,3 г поврежденных семян, а во второй — 1,1 г сорных и 0,4 г поврежденных семян. Определите чистоту посевного материала с точностью до 0,1%.
Указание. Вычислите процент неповрежденных семян в каждой пробе и вычислите среднее арифметическое найденных чисел.

Контрольные вопросы и задания

1. В каком виде записывается уравнение к задаче, в которой величины:
   а) прямо пропорциональны; б) обратно пропорциональны?
2. Для приготовления 12 л напитка потребовалось 4 кг ягод. Сколько потребуется ягод для приготовления 21 л такого напитка?
3. Через полторы минуты после начала движения велосипедист проколол шину. Сколько времени он шел с велосипедом домой, если на обратном пути его скорость была в шесть раз меньше?

§ 37. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1073. При варке варенья на 1 кг ягод берут 1,5 кг сахара. Запишите отношение массы ягод к массе сахара в виде обыкновенной дроби. Сколько сахара нужно, чтобы сварить варенье из 3 кг ягод?

1074. Из двух пунктов навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. К моменту встречи пройденные ими расстояния относились как 1 : 4. Найдите расстояние между пунктами, если известно, что до встречи велосипедист проехал на 21,3 км больше, чем прошел пешеход. Решите эту задачу двумя способами: составляя уравнение и используя рисунок 124.

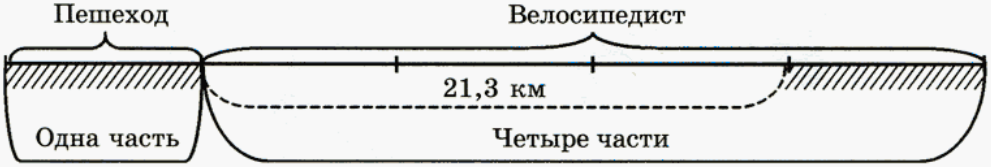


Рис. 124

Найдите разные способы решения следующих двух задач.

1075. Отец старше сына на 25 лет. Возраст отца относится к возрасту сына как $\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$. Сколько лет отцу и сколько лет сыну?

1076. Мама с дочкой лепили пельмени. Пока дочка лепила 2 пельменя, мама успевала слепить 5. Сколько пельменей заготовили мама с дочкой вместе, если дочка в итоге слепила на 96 пельменей меньше, чем мама?

1077. Призовой фонд соревнований по биатлону составляет 500 000 р. Эти деньги делятся между участниками, занявшими 1-е, 2-е и 3-е места, в отношении 7 : 2 : 1. Найдите сумму, которую получит каждый из спортсменов, занявших призовые места.

Решите следующие задачи, составляя уравнение.

1078. От поселка до турбазы, двигаясь в гору, велосипедист доехал за 3 ч. При возвращении его средняя скорость оказалась на 6 км/ч больше, поэтому дорога заняла у него на 1 ч меньше. Найдите, на каком расстоянии от поселка расположена турбаза.

1079. Продано 34 кг яблок и хурмы. Определите, сколько продано яблок и сколько хурмы, если известно, что яблоки дороже хурмы в 2,4 раза и за все яблоки выручено столько же денег, сколько за хурму.

1080. На рынке продали баранину и телятину, причем баранины на 13 кг больше, чем телятины. Найдите стоимость проданного мяса, если известно, что масса баранины относится к массе телятины как 16 : 15 и баранина продавалась по 58 р., а телятина по 63 р. за 1 кг.

Решите следующие задачи удобным для вас способом.

1081. 5 насосов за 3 ч откачали 1800 м^3 воды. Найдите объем воды, которую могут откачать 4 таких же насоса за 4 ч.

1082. Деревянная балка длиной 4 м, шириной 30 см и толщиной 20 см имеет массу 144 кг. Найдите массу балки из другого дерева, 2 см^3 которого имеют такую же массу, как 3 см^3 первого, если эта балка имеет длину 5 м, ширину 40 см и толщину 30 см.

1083. Штукатур с помощником получили за работу 29 050 р. Штукатур работал 8 дней, а его помощник только 35% этого времени. Дневной заработок штукатура на 40% больше, чем его помощника. Сколько денег заработал штукатур и сколько его помощник?

1084. Девять человек выполнили работу за 12 дней при семичасовом рабочем дне. За какое время выполнят ту же работу десять человек при восьмичасовом рабочем дне, если часовая производительность труда повысится на 20%?

1085. За 6 ч автомобиль проехал некоторое расстояние. То же расстояние он мог бы проехать за 5 ч, если бы увеличил свою скорость на 10 км/ч. Какое расстояние проехал автомобиль?

1086. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Сколько времени занял у велосипедиста весь путь, если мотоциклисту на это понадобилось 24 мин, а их встреча произошла через 18 мин после выезда?

1087. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехал велосипедист и вышел пешеход. Через какое время они встретятся, если велосипедисту на весь путь требуется 40 мин, а пешеходу 2 ч?

1088. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу отправились пешеход и велосипедист, и к моменту встречи велосипедист проехал расстояние в 3 раза большее, чем прошел пешеход. Сколько времени затратил велосипедист на путь из B в A, если пешеход пришел в B через 45 мин после встречи с велосипедистом?

1089. Один поезд проходит расстояние между станциями за 26 мин, а другой за 39 мин. Через какое время они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу?

1090. Две трубы, работая вместе, могут наполнить бассейн за 15 мин. Если бы первая труба работала одна, то наполнение бассейна заняло бы 20 мин. Сколько времени понадобится для заполнения бассейна через вторую трубу?

1091. Какая сумма окажется через год на счете, по которому выплачивается 2% годовых, если первоначальный вклад составил 8700 р.?

1092. а) В банк, который дает 1,5% годовых, положили 4000 р. Через какое время общий доход с этой суммы составит 120 р., 840 р., если каждый год снимать начисленные проценты?

б) Какие проценты выплачиваются по вкладу, если на счет была положена сумма 4500 р., а через год она составила 4554 р.?

1093. Рабочий получает зарплату в 1,5 раза больше ученика. Как разделить между тремя рабочими и двумя учениками заработанные ими совместно 1430 р.?

1094. Вычислите:

а) $\dfrac{7\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{2}}{110\cdot\frac{3}{5}}+\dfrac{3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}}{24:2\frac{2}{5}}$;

б) $\left(3\frac{1}{4}+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{4}+5\frac{1}{6}$;

в) $\dfrac{\left(4\frac{2}{5}+1\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{8}{13}+3\frac{2}{3}\right)}{144-256}$;

г) $\dfrac{5\frac{9}{11}:1\frac{2}{9}-7\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{23}}{\frac{11}{54}-\frac{5}{36}}$.

1095. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{4x-3}{2}-\dfrac{5-x}{6}=1$;

б) $3-\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{x-4}{2}+\dfrac{2x-1}{10}=0$.

§ 38. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ПОНЯТИЕМ «ВЕРОЯТНОСТЬ»

Вам не раз приходилось слышать такие слова: «это невероятно», «более вероятно, что...», «это маловероятно», «можно утверждать со стопроцентной вероятностью, что...». Эти словосочетания мы употребляем, когда пытаемся спрогнозировать наступление того или иного события. Приведем сценку из жизни. Андрей и Витя идут в школу на первый урок — математику. Между ними происходит следующий диалог.

Андрей. Вероятно, меня сегодня вызовут к доске.

Витя. Меня тоже, вероятно, сегодня вызовут.

Андрей. Тебя недавно спрашивали, а меня давно не спрашивали, так что более вероятно, что вызовут меня, а не тебя.

Витя. Согласен. Меня тоже могут вызвать отвечать, но это менее вероятно.

Обратите внимание, какие термины использовали ребята: «вероятно», «более вероятно», «менее вероятно».

Вы знаете, что бывают три вида событий: достоверное, невозможное и случайное. Событие, которое при данных условиях обязательно наступит, называют *достоверным*. Событие, которое при данных условиях никогда не наступит, называют *невозможным*. Событие, которое при данных

условиях может наступить, а может не наступить, называют *случайным*. Думая про наступление достоверного события, вы слово «вероятно» использовать, скорее всего, не будете. Например, если сегодня среда, то завтра четверг, это достоверное событие. Вы в среду не станете говорить: «Вероятно, завтра четверг», вы скажете коротко и ясно: «Завтра четверг». Правда, если вы склонны к красивым фразам, то можете сказать так: «Со стопроцентной вероятностью утверждаю, что завтра четверг». Напротив, если сегодня среда, то наступление назавтра пятницы — невозможное событие. Оценивая это событие в среду, вы можете сказать так: «Уверен, что завтра не пятница». Или так: «Невероятно, что завтра пятница».

Ну а если вы склонны к красивым фразам, то можете сказать так: «То, что завтра пятница, — нулевая вероятность».

Но, к сожалению (а может быть, к счастью?), не все в жизни так четко и ясно: это будет всегда (достоверное событие), этого не будет никогда (невозможное событие). Чаще всего мы сталкиваемся со случайными событиями, одни из которых более вероятны, другие менее вероятны. Обычно люди используют слова «более вероятно» или «менее вероятно», как говорится, по наитию, опираясь на то, что называют здравым смыслом.

У **1096.** Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное. Оцените событие словами «стопроцентная вероятность», «нулевая вероятность», «маловероятно», «достаточно вероятно». Если речь идет о двух похожих случайных событиях, попробуйте сравнить, какое из них более вероятно, а какое — менее вероятно.

1) Среди ночи выглянуло солнце.

2) Дата рождения моего друга — число меньшее, чем 32.

3) На уроке математики ученики делали физические упражнения.

4) На уроке математики ученики решали математические задачи.

5) Сборная РФ по футболу станет чемпионом мира в 2010 г.

6) Сборная РФ по хоккею станет чемпионом мира в 2010 г.

7) Из интервала (1; 2) наугад взяли число; оно оказалось натуральным.

8) Из отрезка [1; 2] наугад взяли число; оно оказалось натуральным.

9) Из отрезка [1; 2] наугад взяли число; оно оказалось смешанным.

10) Вверх подкинули монету, и она упала на землю «орлом».

11) Вверх подкинули монету, и она упала на землю «решкой».

Проверьте себя.

1) Среди ночи выглянуло солнце. Это невозможное событие, событие с нулевой вероятностью.

2) Дата рождения моего друга — число меньшее, чем 32. В каждом месяце не более 31 дня, так что указанное событие достоверное, событие со стопроцентной вероятностью.

3) На уроке математики ученики делали физические упражнения. Вполне возможно, что учитель предложил ученикам слегка размяться. Это случайное событие, но, пожалуй, маловероятное.

4) На уроке математики ученики решали математические задачи. Это тоже случайное событие, поскольку бывают уроки математики, на которых задачи не решаются, например урок-лекция. Если сравнить это случайное событие с предыдущим, то второе — более вероятно, первое — менее вероятно.

5) Сборная России по футболу станет чемпионом мира в 2010 г. Как говорится, свежо предание, да верится с трудом. Это случайное событие, которое, зная уровень российского футбола, следует оценить как маловероятное.

6) Сборная России по хоккею станет чемпионом мира в 2010 г. Это тоже случайное событие, которое, зная уровень российского хоккея, следует оценить как маловероятное. Но все же если сравнить это событие с предыдущим, то следует признать: оно более вероятно. Все-таки российский хоккей на первых ролях в мире (чего не скажешь о российском футболе).

7) Из интервала (1; 2) наугад взяли какое-то число; оно оказалось натуральным. В интервале (1; 2) нет ни одного натурального числа, так что указанное событие — невозможное, это событие с нулевой вероятностью.

8) Из отрезка [1; 2] наугад взяли какое-то число; оно оказалось натуральным. Это случайное событие, оно может наступить (если

выбранное вами число оказалось 1 или 2), а может и не наступить. Но оценить это событие следует как маловероятное.

9) Из отрезка [1; 2] наугад взяли какое-то число; оно оказалось смешанным. Это тоже случайное событие, оно может наступить (если выбранное вами число оказалось $1\frac{2}{3}$, или $1\frac{13}{17}$, или $1\frac{1}{100}$ и т. д.), а может и не наступить. Оценить это событие следует как достаточно вероятное и уж во всяком случае более вероятное, чем предыдущее событие.

10) и 11) Вверх подкинули монету, и она упала на землю «орлом»; «решкой». Оба события случайны, но сказать, какое из них более, а какое — менее вероятно, нельзя. Эти события *равновероятны*.

Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное. Оцените событие словами «стопроцентная вероятность», «нулевая вероятность», «маловероятно», «достаточно вероятно». Если речь идет о двух похожих случайных событиях, попробуйте сравнить, какое из них более вероятно, какое — менее вероятно, какие — равновероятны.

1097. а) 25 апреля в Москве будет дождь;
б) 25 апреля в Москве будет снег;
в) 25 апреля в Москве день будет длиннее ночи;
г) 25 апреля в Москве день будет короче ночи.

1098. Вы берете наугад любое слово с этой страницы учебника. Событие состоит в следующем:
а) в выбранном слове есть буква *о*;
б) в выбранном слове есть буква *ф*;
в) в выбранном слове есть гласная;
г) в выбранном слове есть китайский иероглиф.

1099. Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:
а) задумано четное число;
б) задумано нечетное число;
в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным;
г) задумано число, являющееся четным или нечетным.

1100. Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано простое число;
б) задумано составное число;
в) задумано число, кратное 2;
г) задумано число, дающее при делении на 2 остаток 1.

1101. Петя перемножил два рациональных числа a и b. Событие состоит в следующем:

а) ab — положительное число;
б) ab — отрицательное число;
в) $ab = 0$;
г) ab отлично от 0.

1102. Даны два интервала: (0; 1) и (5; 10), из первого выбирается число a, из второго выбирается число c. Событие состоит в следующем:

а) число a меньше числа c;
б) число a больше числа c;
в) число $a + c$ принадлежит интервалу (5; 10);
г) число $a + c$ не принадлежит интервалу (5; 10).

§ 39. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ПОДСЧЕТОМ ВЕРОЯТНОСТИ

Мы уже говорили о том, что, оценивая вероятность случайного события, люди используют слова «более вероятно», «менее вероятно», «равновероятно» чаще всего по наитию, руководствуясь здравым смыслом. Именно так, наверное, действовали и вы при выполнении заданий из предыдущего параграфа. Но очень часто такие оценки оказываются недостаточными, очень часто важно знать, *на сколько* или *во сколько раз* одно случайное событие вероятнее другого. Иными словами, нужны точные *количественные* характеристики, нужно уметь охарактеризовать вероятность числом.

Первые шаги в этом направлении мы с вами уже сделали. Мы говорили, что вероятность наступления достоверного события характеризуется как *стопроцентная*, а вероятность наступления невозможного события

характеризуется как *нулевая*. Учитывая, что 100% — это $\frac{100}{100}$ величины, а $\frac{100}{100} = 1$, договорились о следующем:

1) *вероятность достоверного события считается равной 1*;

2) *вероятность невозможного события считается равной 0*.

А как подсчитать вероятность случайного события? Ведь если оно случайное, значит, не подчиняется закономерностям, алгоритмам, формулам. Оказывается, и в мире случайного действуют определенные законы, позволяющие вычислять вероятности. Этим занимается раздел математики, который так и называется — *теория вероятностей*. Пока мы знакомимся лишь с азами этой теории.

Попытаемся научиться вычислять вероятность в самой простой ситуации, когда исход случайного события состоит из нескольких *равновозможных вариантов*. Пусть событие состоит в следующем: вверх подкинули монету и она упала на землю «орлом» или «решкой». Это достоверное событие: монета непременно упадет либо «орлом», либо «решкой», третьего варианта нет. Оба исхода — выпадение «орла» или выпадение «решки» — равновозможны, или, как мы уже говорили в предыдущем параграфе, *равновероятны*. Но тогда естественно считать, что вероятность события «выпадение “орла”» (обозначим это событие буквой A) равна вероятности события «выпадение “решки”» (обозначим это событие буквой B) и что их сумма равна вероятности события «выпадение “орла” или “решки”» (обозначим это событие буквой C). Последнее событие достоверное, его вероятность равна 1. Значит, вероятность выпадения «орла» равна $\frac{1}{2}$ и вероятность выпадения «решки» равна $\frac{1}{2}$.

Принято вероятность события обозначать буквой P (видимо, из-за того что *вероятность* по-французски — *probabilité*). Таким образом, в нашей задаче о бросании монеты получаем:

$P(C) = 1$; $P(A) = P(B)$; $P(A) + P(B) = P(C)$, т. е. $P(A) + P(B) = 1$;

значит, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

У **1103.** Бросают игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет: 1) 1; 2) 2; 3) четное число очков; 4) нечетное число очков; 5) число очков больше 4; 6) число очков меньше 5?

Проверьте себя.

Всего имеется 6 равновероятных возможностей: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из шести равновероятных событий складывается достоверное событие — выпадение одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность достоверного события равна 1, значит, вероятность каждого из указанных шести равновероятных событий равна $\frac{1}{6}$. Таким образом,

в случае 1) имеем $P = \frac{1}{6}$;

в случае 2) также имеем $P = \frac{1}{6}$.

Рассмотрим случай 3). Он состоит из трех равновероятных возможностей — выпадения 2, выпадения 4, выпадения 6. Значит,

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим случай 4). Он также состоит из трех равновероятных возможностей — выпадения 1, выпадения 3, выпадения 5. Значит,

$$P = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим случай 5). Он состоит из двух равновероятных возможностей — выпадения 5 и выпадения 6. Значит,

$$P = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим, наконец, случай 6). Он состоит из четырех равновероятных возможностей — выпадения 1, 2, 3 или 4. Значит,

$$P = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Итак, если достоверное событие состоит из нескольких равновероятных возможностей, то вероятность случайного события можно вычислить по следующему правилу:

вероятность случайного события равна дроби, в знаменателе которой содержится число всех равновероятных возможностей, из которых состоит достоверное событие, а в числителе — число тех возможностей, при которых рассматриваемое событие происходит.

Иногда вместо слов *число всех равновероятных возможностей, из которых состоит достоверное событие,* используют более короткое словосочетание *число всех исходов* (т. е. достоверное событие — это как бы серия испытаний, у каждого из которых есть свой результат, свой *исход*). Аналогично, вместо слов *число тех возможностей, при которых рассматриваемое событие происходит,* используют словосочетание *число благоприятных исходов*. Тогда формулу для вычисления вероятности можно записать так:

$$P = \frac{\textbf{число всех благоприятных исходов}}{\textbf{число всех исходов}}.$$

Вероятность часто записывают в процентах. Значит, можно записать

$$P = \frac{1}{2},$$

а можно использовать равноправную запись

$$P = 50\%.$$

Рассуждая о вероятности, не упускайте из виду следующее важное обстоятельство. Если мы говорим, что при бросании кубика вероятность выпадения 1 равна $\frac{1}{6}$, это совсем не значит, что, кинув кубик 6 раз, вы получите 1 один раз, бросив кубик 12 раз, вы получите 1 два раза, бросив кубик 18 раз, вы получите 1 три раза и т. д. Слово *вероятно* носит *предположительный характер*. Мы предполагаем, что скорее всего может произойти. Вероятно, если мы бросим кубик 600 раз, цифра 1 выпадет 100 раз или около 100. Если у вас будет время и желание, проведите эксперимент: бросьте игральный кубик, например, 60 раз и составьте таблицу выпадений цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Скорее всего (*вероятнее всего*) все числа в вашей таблице будут близки к 10.

1104. В колоде 36 карт, из них наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что вынутая карта:

а) король;
б) масти «пики»;
в) красной масти;
г) «картинка», т. е. валет, дама, король или туз?

1105. В школьной лотерее распространили 400 билетов, из которых выигрышными являются 50.

а) Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?

б) Сколько следует приобрести билетов, чтобы вероятность того, что хотя бы один билет выигрышный, была бы равна 100%?

У **1106.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, если известно, что цифры не должны повторяться? Какова вероятность того, что составленное число делится на 5?

Проверьте себя.

Для цифры сотен у нас есть 4 варианта — 1, 3, 5 или 7; для цифры десятков мы можем использовать для каждой выбранной цифры сотен лишь 3 варианта, поскольку повторять цифру сотен мы не имеем права (по условию задачи все цифры должны быть различными). Для цифры единиц у нас в каждом случае есть лишь две оставшиеся возможности — 2 варианта. Применив правило умножения, получим: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Итого 24 числа (*число всех исходов*).

Чтобы число, состоящее из цифр 1, 3, 5, 7, делилось на 5, нужно, чтобы цифрой единиц служила 5. Первые две цифры числа следует выбирать из оставшихся цифр 1, 3, 7. На первом месте может находиться любая из этих трех цифр, на втором — любая из двух оставшихся. Итого 6 вариантов (*число благоприятных исходов*). Теперь нетрудно подсчитать искомую вероятность:

$$P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

1107. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4? Какова вероятность того, что составленное число:

а) четное; б) нечетное; в) делится на 5; г) делится на 4?

1108. Собрание для проведения тайного голосования по важному вопросу избрало счетную комиссию в составе: Антонов, Борисова и Ващенко. Члены счетной комиссии распределяют должности: председатель, заместитель, секретарь. Какова вероятность, что председателем счетной комиссии будет Борисова?

1109. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Учитель собирается назначить двух дежурных: мальчика и девочку. Тане Петровой сегодня некогда, она не может дежурить по классу. Какова вероятность того, что она не будет назначена учителем и ей не придется отпрашиваться?

1110. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить трех человек — одну девочку и двух мальчиков — для посещения заболевшего ученика этого класса. Тане Петровой очень хочется попасть в число посетителей. Какова вероятность того, что Таню включат в тройку?

1111. В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить трех человек — одну девочку и двух мальчиков — для посещения заболевшей ученицы этого класса. Коле Иванову очень хочется попасть в число посетителей. Какова вероятность того, что Колю включат в тройку?

1112. В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой — семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимают по одному шару.

а) Сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров (комбинации типа «синий — красный» и «красный — синий» считаются одинаковыми)?

б) Какова вероятность того, что вынутые шары окажутся одного цвета?

в) Какова вероятность того, что вынутые шары окажутся разных цветов?

1113. В коробке «Ассорти» 20 конфет, из которых 10 с шоколадной начинкой и 10 с пралиновой начинкой, каждая конфета находится в своей ячейке. Тане разрешили взять две конфеты. Сколькими способами она может это сделать? Какова вероятность того, что обе конфеты окажутся с любимой Таниной начинкой — шоколадной?

1114. Какова вероятность выигрыша в спортивной лотерее «3 из 16» (в лотерее участвует 16 номеров — с 1-го до 16-го, выигрыш выпадает на 3 номера)?

ДОМАШНИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

РАБОТА № 1 (§ 1—4)

1. Отметьте на координатной прямой точки:

$$A(-3),\ B(0{,}5),\ C(-1{,}5),\ D\left(-1\frac{3}{4}\right).$$

Ответьте на вопросы.

а) Какая точка имеет наибольшую координату?

б) Координата какой из точек имеет наибольший модуль? наименьший модуль?

в) Как изменятся координаты точек, если начало координат перенести на 4 единичных отрезка влево? Как изменятся их модули? Укажите точку, модуль координаты которой не изменится.

2. Найдите x из равенств:

а) $|x| = 5$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = \frac{1}{2}$.

3. Сравните числа:

а) $-15{,}3$ и $-15{,}03$; б) $\frac{1}{6}$ и $-\frac{5}{6}$; в) $-1\frac{5}{8}$ и $-\frac{25}{16}$.

4. В строительстве дороги принимали участие две бригады, причем число рабочих первой бригады составило 52% числа всех рабочих двух бригад. Сколько рабочих в двух бригадах, если в первой бригаде на 2 человека больше, чем во второй?

РАБОТА № 2 (§ 5—9)

1. Представьте выражение в виде суммы:

$$(-5) - 3 + (-6) - (-7).$$

2. Запишите выражения без скобок и найдите значение каждого из них:

а) $-(-1{,}7) + (+8{,}3) - (+4{,}35) + (-5{,}65)$;

б) $\left(+\frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(+\frac{5}{8}\right)$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ проведите диагональ AC; отрезок, соединяющий середины сторон AB и BC; отрезок, соединяющий середины сторон AD и DC. Как, по вашему мнению, расположены прямые, содержащие проведенные отрезки?

4. $\rho(a, b) = 25$, $a = 7$. Найдите b.

РАБОТА № 3 (§ 10—15)

1. Определите вид числовых промежутков, составьте аналитическую и геометрическую модели для каждого из них:

а) $(-\infty; 3{,}2)$; б) $[-9{,}1; +\infty)$; в) $(3{,}7; 7{,}9)$; г) $[-2{,}8; -2{,}1]$.

Укажите, если возможно, наибольшее и наименьшее целые числа, принадлежащие каждому промежутку.

2. Вычислите:

а) $(-4{,}2 + 2{,}48) \cdot (-1{,}5) + (-17{,}29 - 2{,}71) : (-2{,}5)$;

б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{16}\right) \cdot \frac{4}{9} - \left(-\frac{7}{9} + \frac{1}{3}\right) : 2\frac{2}{3}$.

3. Постройте на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках $A(-5; 1)$, $B(2; 4)$, $C(3; -2)$. Выполните задания.

а) Начертите треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно оси ординат.

б) Начертите треугольник $A_2B_2C_2$, симметричный треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно начала координат. Симметричен ли треугольник $A_2B_2C_2$ треугольнику ABC относительно какой-либо прямой или какой-либо точки?

4. Представьте каждое выражение в таком виде, чтобы можно было определить, расстоянию между какими точками координатной прямой оно равно:

а) $|-(-18{,}3) + 4{,}1|$; б) $|-7{,}2 + (-3{,}2)|$.

5. Укажите, имеет ли фигура ось симметрии, центр симметрии или не имеет ни того, ни другого (рис. 125).

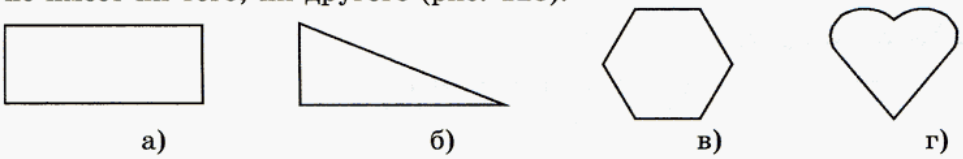


Рис. 125

РАБОТА № 4 (§ 17—20)

1. Упростите выражения:

а) $-0{,}2(2x - 1) + 4{,}2(0{,}5x - 8x)$; б) $-(m + 2n - 7) - (-2m - 5n + 8)$.

2. Решите уравнения:

а) $2(5 - 3x) = 6 - 5x$;

б) $2(1 - x) - 4(2x + 8) = 8x + 28$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x = x - \frac{3}{4}$.

3. Ежемесячный доход семьи составляет 24 000 р. На транспортные расходы тратится 2,5% этой суммы. Из них 30% — стоимость проездных билетов для матери и сына, а остальное — стоимость бензина для автомобиля отца. Найдите сумму, которая ежемесячно тратится на бензин.

4. До повышения тарифов за проезд стоимость билета на маршрутном такси составляла 10 р., а после повышения — 11 р. На сколько процентов увеличилась оплата проезда?

РАБОТА № 5 (§ 21—24)

1. После привала в рюкзаке у одного из туристов оказалось в 5 раз больше продуктов, чем у другого. Для того чтобы уравнять груз, 6 кг продуктов из его рюкзака переложили в рюкзак второго туриста. Сколько килограммов продуктов оказалось в рюкзаках каждого из туристов после привала до перекладывания?

2. Автомобиль был в пути 3 часа. За первый час он проехал $\frac{1}{3}$ всего пути, за второй час — $\frac{3}{5}$ оставшегося, а за третий — последние 90 км. Какое расстояние проехал автомобиль за 3 часа?

3. Диаметр клумбы, имеющей форму круга, увеличили на 1 м. На сколько возросла длина бордюра вокруг этой клумбы?

4. Выполните необходимые измерения и найдите площадь закрашенной части фигуры (рис. 126).

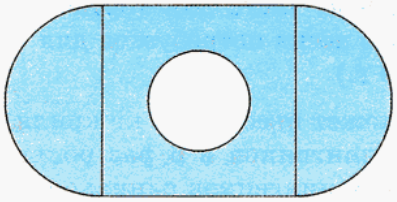


Рис. 126

РАБОТА № 6 (§ 25—29)

1. Используя известные вам свойства делимости, покажите, что следующие дроби можно сократить на 17:

а) $\frac{34 + 51}{68 - 17}$; б) $\frac{136 \cdot 21}{85 + 119}$.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{245}{720}$; б) $\frac{1890}{3105}$.

3. Выполните действия: $\left(\frac{3}{15} - 2\frac{7}{25}\right) : 1\frac{2}{25} + 1\frac{4}{13}$.

4. Что больше: 15% от 35 или 35% от 16?

РАБОТА № 7 (§ 30—32)

1. Завершите разложение на простые множители:
а) $2^3 \cdot 7 \cdot 21$; б) $5^4 \cdot 11^2 \cdot 121$.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{936}{3696}$; б) $\frac{1815}{14\,520}$.

3. Вычислите: $\left(\frac{15}{98} - \frac{17}{28}\right) : 4\frac{5}{21} + \left(\frac{4}{40} - \frac{3}{20}\right) \cdot 21\frac{3}{7}$.

4. Сформулируйте признак делимости на 21.

РАБОТА № 8 (§ 33—36)

1. Число яблонь в саду относится к числу груш как 2 : 5. Определите, сколько яблонь и сколько груш растет в саду, если яблонь на 48 меньше, чем груш.

2. На изготовление 8 кг теста для торта требуется 750 г сахарного песка. Сколько сахарного песка потребуется для 5 кг такого теста? (Ответ дайте с точностью до 10 г.)

3. Стая пингвинов может съесть 200 кг криля за трое суток. За какое время стая, в которой пингвинов в 6 раз больше, съест 300 кг криля (будем считать, что у всех пингвинов одинаковый аппетит)?

4. Баскетбольный матч между командами «Спруттак» и «Гайдаровец» завершился со счетом 84 : 62. Протоколом матча было зафиксировано число результативных бросков: штрафных — 11, дальних бросков — 5, прочих — 60. Каждый результативный штрафной бросок приносит команде 1 очко, дальний бросок — 3 очка, а остальные — по 2 очка. Определите, сколько процентов приходится на число очков, заработанных бросками каждого из указанных видов, и постройте круговую диаграмму.

ОТВЕТЫ

Глава I

§ 1 **14.** а) 18,01; г) 39,05. **15.** б) 1,7922; в) 48. **20.** а) M_1 (14); в) K_1 (6). **21.** а) 26,5; г) 3,62. **22.** б) 15,52; в) 28,85. **23.** а) A (20); в) A (45). **24.** б) A (2,26); г) A (0,498). **25.** Латвия: $\frac{1}{3}$ — белый, $\frac{2}{3}$ — бордовый; Испания: $\frac{1}{2}$ — желтый, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ — красный; Таиланд: $\frac{1}{3}$ — синий, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ — красный, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ — белый; Узбекистан: $\frac{1}{3}$ — белый, $\frac{1}{3}$ — синий, $\frac{1}{3}$ — зеленый. **27.** а) $\frac{10}{16}$, или $\frac{5}{8}$, или 0,625; в) $\frac{8}{16}$, или $\frac{1}{2}$, или 0,5. **28.** б) $\frac{2}{3}$; в) 1,5. **29.** 4 варианта: 2, когда полосы расположены горизонтально, и 2 — когда вертикально.

§ 2 **38.** б) $A\left(\frac{1}{2}\right)$; $B(1)$; $C\left(-\frac{2}{10}\right)$; $D(0,8)$. **41.** а) $P_1(-2)$; б) $S_1(13)$; в) $T_1(-15)$; г) $Q_1(48)$. **42.** а) $A_1(-35,5)$; в) $C_1(-10,1)$. **45.** а) 12,359; в) 0. **46.** б) $\frac{2}{3}$. **49.** а) 1; в) $6\frac{1}{2}$. **50.** б) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{1}{7}$. **54.** а) 1; б) $1\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{15}$; з) $\frac{1}{40}$.

§ 3 **82.** б) 6,8; г) 43,6. **83.** а) $x = -8,5$; б) $x = 4,2$. **91.** а) 4,5; в) 0,5. **92.** б) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{7}$. **94.** 18,8 т. **95.** 12 мин. **105.** а) $1\frac{1}{9}$; в) $\frac{12}{25}$. **106.** б) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{8}$.

§ 4 **139.** а) 1, 2, 3, 4; в) 1, 2, 3. **140.** б) −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3; в) −1, 0, 1. **141.** а) 0; б) 3; в) 0,83; г) 9.

§ 5 **149.** а) $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$; г) параллельных прямых нет. **153.** а) На 8°; б) на 39°. **156.** а) $A(-2)$; $B(+3)$; $C(+8)$; $D(+12)$. Координаты всех точек увеличились на 4; б) нет; в) модуль координаты точки A уменьшился, модули координат точек B, C и D увеличились; г) точка $X(-2)$. **157.** а) На 3 единичных отрезка влево; г) на 10 единичных отрезков вправо. **158.** а) $\frac{7}{9}$; б) $-\frac{2}{3}$. **159.** а) $\frac{7}{22}$; б) $-\frac{4}{11}$. **165.** в) $\frac{31}{35}$; г) $\frac{3}{20}$. **166.** б) $1\frac{1}{9}$; г) $\frac{12}{25}$. **167.** а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{8}$. **169.** б) 3; г) 10.

§ 6 **179.** а) 73; б) −73; в) 27; г) −27. **181.** а) −80; б) 4; в) −4; г) 80. **182.** а) −4,3; б) −9,3; в) 4,3; г) 9,3. **186.** а) 1; г) $-\frac{7}{23}$. **187.** б) $\frac{6}{19}$; г) $\frac{16}{19}$. **192.** б) −25,18; в) −6,38;

е) −0,4. **193.** б) $-1\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{2}$. **194.** б) −1; в) $\frac{7}{15}$. **197.** а) $1\frac{5}{8}$; г) $-\frac{1}{8}$. **198.** а) $1\frac{8}{15}$; в) $-\frac{1}{15}$. **207.** а) 14; б) −85; в) −31; г) 0. **208.** б) −2,1; г) 7,7. **209.** а) −4,4; в) 0. **210.** а) $-\frac{3}{7}$; г) $-\frac{5}{21}$. **212.** в) $-\frac{11}{12}$; г) $\frac{4}{9}$. **217.** 1 561 600. **218.** 8748 р. **220.** 10.

§ 7 **230.** а) 26; б) −24. **231.** а) 0; б) −11. **232.** а) 6; б) 99. **236.** а) 0. **237.** б) −70,03. **238.** а) −9,9. **243.** а) −12; б) 95. **244.** б) −44; г) −30. **246.** а) $-1\frac{2}{3}$; в) $-6\frac{7}{9}$. **248.** а) $7\frac{7}{9}$; б) $-7\frac{7}{9}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{2}{3}$. **249.** а) $-\frac{1}{30}$; в) $\frac{11}{24}$. **250.** б) $-\frac{29}{42}$; г) $-\frac{29}{90}$. **251.** 3. 8, 11, 12. **255.** 1. а) 0,3%; б) 3,375%; 2. За 4,5 ч. **256.** 12 771 376 р. 95 к. — весь налог, из них 5 534 263 р. 35 к. — в федеральный бюджет, 7 237 113 р. 61 к. — в городской бюджет. **257.** 1,935 — среднее арифметическое чисел −1,56 и 5,43.

§ 8 **266.** а) 9,47; б) 8,808; в) 5,056; г) 2,62. **267.** а) −5,661; б) 5,494. **268.** а) $-\frac{1}{2}$; в) −1. **269.** а) $-1\frac{2}{11}$; г) 5. **272.** б) −29; г) −18,63. **273.** в) 37,72; г) −111,2. **278.** AB = = 2,5 см; BC = 1,5 см; CD = 3,8 см; AD = 4,8 см. **283.** 23 р. 80 к. **284.** 11 р. 80 к.

§ 9 **296.** а) 3,3; б) 9; в) 6,9; г) 12,7. **297.** а) 5; б) 3. **298.** б) 6,8; −2,2; в) 4; $-3\frac{2}{3}$. **300.** а) 2,85; б) −100. **301.** а) 1; б) 0,1. **302.** 8007 ц. **304.** 150 000 р. под 7% и 100 000 р. под 5%.

§ 10 **319.** а) −6,5; г) $\frac{1}{3}$. **320.** б) 19; г) −1,37. **321.** а) −1; в) 10,9. **323.** а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{2}{15}$; в) $\frac{5}{24}$; г) $-\frac{7}{18}$. **324.** б) $-1\frac{7}{15}$; в) $-\frac{5}{24}$. **325.** а) $\frac{1}{10}$; г) $-\frac{19}{36}$. **326.** а) $-1\frac{3}{4}$; г) $3\frac{13}{15}$. **328.** г) 14. **330.** 28 р.

§ 11 **353.** а) [−5; −2]; б) (3; 7). **356.** а) −10; б) не существует; в) 0; г) не существует. **359.** а) −0,1; в) 2,05. **360.** а) −6,49; б) −2,31; в) −1,85. **361.** а) 2,9; в) 2,5. **362.** 4500 р. **363.** 2 кг; 28,9 кг.

§ 12 **372.** а) −90; в) 0,81; д) −1100; ж) −420. **373.** а) $-2\frac{1}{7}$; в) $-\frac{4}{5}$; д) $1\frac{1}{3}$; ж) $\frac{8}{21}$. **375.** в) 3,05; г) $-\frac{2}{15}$. **376.** в) −1,005; г) $\frac{3}{10}$. **377.** б) $-\frac{9}{11}$; в) $-\frac{2}{3}$. **378.** б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{3}{7}$. **380.** а) $-1\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{25}$. **381.** в) $3\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{8}$. **384.** а) −26; б) $13\frac{1}{11}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{9}{11}$.

385. в) −0,18; г) −850,1. **386.** а) −27,49; в) 5,59508. **387.** б) 68; г) 43,5. **389.** а) $-3a$; в) $-5x$; д) c; ж) $8m$. **391.** а) $-18a$; г) $12d$. **392.** б) $-24y$; в) $12n$. **393.** б) $-3a$; г) $-2x$. **394.** а) $-3a$; в) $-2x$.

§ 13 **404.** а) −5,5825; г) −11,07; д) −6,6976; е) 0; ж) 37,88; з) 36,36. **411.** а) 12; б) −3; в) 28; г) −3.

§ 14 **422.** а) 40 см²; б) 35 см²; в) 40 см²; г) 48 см². **423.** а) (−3; −2). **424.** а) 6 см²; б) 5 см²; в) 6,125 см²; г) 10 см². **425.** а) 12 см². **426.** а) 5,5 см²; в) 10,5 см². **438.** а) −1,224; б) −36; в) −25,92; г) −0,28. **441.** а) $-4x$; б) $-4x$. **442.** в) $4x$; г) $1\frac{2}{3}x$. **443.** а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{40}$; в) $\frac{3}{20}$.

§ 15 **446.** а) $\frac{20}{63}$; в) $-\frac{14}{51}$. **447.** б) $\frac{3}{5}$; г) −1. **451.** а) $4\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. **452.** б) 3; г) $\frac{26}{33}$. **453.** 1. **456.** 400 л. **457.** $28\frac{1}{8}$ градуса. **458.** $1\frac{1}{9}$ м². **459.** $8\frac{5}{8}$ м; 23 м; $2\frac{7}{8}$ м. **460.** $1111\frac{8}{25}$ кг. **467.** а) $1\frac{1}{9}$; б) $-\frac{30}{31}$. **468.** в) $-5\frac{10}{63}$; г) $-\frac{2}{3}$. **472.** а) $\frac{20}{21}$; в) $\frac{2}{3}$. **473.** б) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{100}{441}$. **474.** а) $\frac{10}{21}$; г) $\frac{10}{147}$. **476.** а) 20; г) 70. **480.** а) $\frac{3}{35}$; б) $2\frac{1}{7}$; в) $2\frac{11}{12}$; г) $\frac{15}{28}$. **488.** а) −5; в) $-\frac{1}{5}$. **489.** б) $-\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{2}$.

§ 16 **495.** 6. **496.** 24. **497.** 24. **498.** а) 195; б) 378. **499.** а) 455; б) 220; в) 990; г) 1260. **500.** а) 364; в) 1092. **501.** а) 25; б) 20. **503.** а) 18; б) 4. **506.** 120; 24; 6. **508.** а) 3360; б) 240. **509.** а) 7; б) 21; в) 28. **510.** 36; 32. **511.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 6. **512.** б) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$. **513.** а) −3,6; в) $\frac{1}{14}$. **514.** в) 0,4; г) −11. **517.** б) 81; г) $14\frac{2}{5}$.

Глава II

§ 17 **519.** а) $-5x-5y-35$; в) $-3c-24-3d$. **525.** а) $2a-4$; г) $-7a-19$. **526.** б) $-5b-7$; в) $3y-72$. **528.** б) $x+y+9-t$; в) $-6+m-n-k$. **530.** б) $-a+b-3$; г) $-p+q-10$. **531.** а) $18-y$; в) $u-v+24$. **532.** а) −4; в) −3. **533.** б) −1,5; г) 1. **534.** а) −17; в) 2. **538.** б) $-\frac{3}{14}$; г) $\frac{1}{10}$. **539.** а) $\frac{22}{35}$; в) $-\frac{3}{4}$. **540.** а) $2\frac{5}{24}$; б) $2\frac{13}{72}$. **541.** а) 1; б) 2. **542.** а) 3; б) $13\frac{4}{7}$. **543.** а) −81,01; в) 0. **544.** а) −0,00015; г) −0,000028.

§ 18 **548.** б) $-0{,}981x$; г) $-22{,}7x$. **549.** а) $-\frac{1}{15}x$; г) $\frac{1}{25}x$. **550.** б) $-\frac{11}{15}x$; в) $-\frac{7}{15}x$. **551.** б) $\frac{1}{3}a$; г) $-\frac{1}{3}a$. **552.** а) $1\frac{3}{8}y$; в) $-\frac{3}{8}y$. **553.** а) $1\frac{4}{7}b$; в) $\frac{5}{21}b$. **554.** а) $-51x$; б) $47x$. **555.** а) $3a + 14$; в) $7a - 14$. **556.** б) $-14 - 3a$; г) $14 - 7a$. **557.** а) $12 - 13x$; в) $19a + 8$. **558.** б) $-60n + 28$; г) $4d - 5$. **559.** а) $-2x - 7$; б) $5x - 29$; в) $17x - 15$. **561.** а) $35a + 3$; б) $-4b + 6$; в) $18a - 29$; г) $9b - 18$. **563.** а) 5; в) 2. **564.** б) 0,25; г) -1. **569.** в) $-\frac{1}{2}$; г) $-3\frac{1}{2}$. **571.** а) $-6\frac{3}{4}$; б) $-5\frac{7}{8}$. **572.** а) 2; б) $1\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 10. **573.** 3 кг; 45 кг. **575.** 2,5 кг.

§ 19 **580.** а) 11; б) 5; в) -6; г) -7. **581.** а) 2; в) 3. **582.** а) 20; в) нет решения. **583.** б) -2; г) $1\frac{20}{27}$. **584.** а) 0,03; б) 0,2. **585.** в) 2; г) $-0{,}025$. **590.** Проезд в Москве на 3,3% дороже, чем в Подольске. В Подольске проезд на 25% дешевле, чем в Москве. **591.** На 400%; на 80%. **592.** На 16,66%.

§ 20 **595.** 8 и 32 автомобиля. **596.** 15,9 м и 12,5 м. **597.** 15 орехов. **598.** 8 и 32 тетради. **599.** 80 км/ч и 95 км/ч. **600.** 40 км/ч, 70 км/ч. **601.** 1,4 кг — у Тани; 1,6 кг — у Лены; по 3,2 кг — у Юли и Маши. **602.** 24 ученика, 17 парт. **603.** 125 конфет, 27 детей. **607.** а) 8; б) $-0{,}25$. **608.** в) -4; г) 0,75. **610.** а) $6\frac{1}{12}$; б) $3\frac{2}{5}$; в) $-\frac{4}{35}$; г) $-1\frac{4}{9}$.

§ 21 **622.** 192. **623.** 450 000. **624.** 12,16 т. **625.** 800 г. **627.** 850 км. **628.** 368 кг. **629.** 32 500 штук. **630.** 21 диск. **631.** 1100 Кб. **632.** 400 км — длина дистанции; 7 ч 15 мин — время в пути; средняя скорость — приблизительно 55,17 км/ч. **633.** 80 км/ч, 60 км/ч. **635.** 200 р. — второй студент, по 205 р. — первый и третий. **637.** а) 1008 кг. **638.** а) $13\frac{3}{5}$; б) $4\frac{4}{15}$; в) $-4\frac{5}{16}$; г) $-\frac{1}{2}$. **639.** а) $-6{,}839$; б) $-8{,}056$; в) $-338{,}199$; г) $-2{,}7$. **640.** а) 2; б) 15; в) 64; г) $-10{,}5$. **646.** 2,8%; 8%; 1%.

§ 22 **654.** а) 1,5 м; в) 17,5 см. **655.** б) 1,04 дм; г) 0,0025 см. **656.** а) 7 м. **657.** б) 2,5 м. **661.** а) $\frac{5}{8}$; в) $-1\frac{3}{8}$. **665.** $48\frac{5}{6}$. **666.** $-24{,}25$. **667.** 36 кг. **674.** а) 15; в) -1.

§ 23 **675.** а) 28,26 см^2. **676.** а) 0,5024 см^2; в) 5,3066 см^2. **677.** а) 2 см; в) 0,9 см. **682.** б) $-10\frac{1}{2}$; г) $1\frac{17}{33}$. **683.** а) $\frac{10}{21}$; в) $-3\frac{39}{74}$. **684.** в) $44\frac{1}{2}$; г) $-17\frac{1}{3}$. **686.** а) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{3}{2}$. **687.** б) 23; в) 5.

§ 24 **690.** а) $2\frac{155}{192}$ м³; в) $22\frac{11}{24}$ дм³. **691.** а) 1 м. **692.** а) $45\frac{9}{11}$ м²; г) $86\frac{5}{8}$ км². **693.** б) 2; г) $-17\frac{1}{3}$. **694.** а) $\frac{5}{21}$; в) $4\frac{5}{17}$. **701.** а) $-\frac{1}{6}$; б) $1\frac{22}{35}$. **702.** в) −1,5; г) −0,25.

Глава III

§ 25 **710.** а) $\frac{19}{24}$; в) $-\frac{1}{24}$. **713.** 240. **714.** 30 дней, 10 дней, 30 дней. **715.** 180 м. **726.** а) 11,5; б) 0,4; в) 50; г) $3\frac{1}{3}$. **727.** а) 14,1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{63}{500}$; г) $\frac{17}{35}$. **728.** а) 2,4; б) $\frac{2}{3}$; в) 0,0525; г) 0,8. **730.** 27 р., 24 р. **733.** 4 белых гриба.

§ 26 **749.** а) $3xy$; в) $4xyz$; д) $35n$; ж) $3mk$. **750.** а) Указание. Ответ следует записать в виде равенства, например: $24ab = 6a \cdot 4b$. **755.** а) 5; г) $-\frac{1}{3}$. **756.** а) −1; б) $\frac{21}{25}$. **757.** в) 0,4; г) 18,75. **758.** б) $-\frac{8}{27}$. **759.** б) −0,1; в) −8. **763.** $\frac{n}{7}$.

§ 27 **789.** а) $1\frac{1}{5}$; в) $-2\frac{2}{9}$. **790.** а) $5a + 3b$. **791.** а) $17a - 6$. **797.** 7. **798.** а) 22. **799.** в) 3; г) 1,36. **800.** а) $x - 3$; б) $-7a - 7$. **802.** 0,3 м. **804.** 27 и 21.

§ 28 **841.** а) 1,5; г) 4,5. **842.** б) $\frac{27}{49}$; в) $-\frac{4}{7}$. **844.** 4 км/ч, 14 км/ч. **845.** 54. **846.** в) 36; г) 73,5.

§ 29 **864.** а) $\frac{16}{21}$; б) $4\frac{149}{369}$; в) $1\frac{71}{91}$; г) $4\frac{4}{27}$. **867.** а) 378. **868.** а) 16. **870.** а) 4,7; б) 2397,5. **873.** б) −4; г) $-\frac{5}{14}$. **874.** 4 дня. **876.** а) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{6}$. **877.** б) $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{35}{51}$. **878.** а) $-2\frac{3}{17}$; г) $-3\frac{2}{5}$.

§ 30 **901.** а) $\frac{8}{49}$; в) $\frac{27}{50}$. **902.** а) Делители a: 1; 2; 3; 5; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 5$; $3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; делители b: 1; 2; 3; 5; 3^2; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 5$; $3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2 \cdot 3^2$; $5 \cdot 3^2$; делители c: 1; 2; 2^2; 2^3; $2 \cdot 5$; $2^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 5$; 5; б) НОК $(a; b) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = b$; в) НОД $(a; b) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = a$. **903.** б) $\frac{7}{120}$. **904.** а) 1; 2; 3; 6; a; b; ab; $2a$; $2b$; $2ab$; $3a$; $3b$; $3ab$; $6a$; $6b$; $6ab$. **905.** б) 1; m; m^2; n; mn; m^2n. **908.** в) $\frac{4}{5}$. **910.** а) $\frac{5}{6}$. **911.** б) $4\frac{4}{9}$; г) 5. **912.** а) $\frac{9}{20}$; г) $\frac{2}{3}$. **913.** а) $1\frac{4}{15}$; в) $\frac{2}{27}$. **914.** б) $-\frac{8}{45}$; г) $\frac{8}{17}$. **921.** б) $\frac{3}{14}$; в) $1\frac{37}{68}$.

§ 31 **931.** а) 14. **932.** б) 1. **933.** в) 1. **934.** в) Несократимая дробь. **935.** б) $\frac{108}{275}$. **942.** 9. **943.** Стоимость набора — 17 р. Маша купила 5 наборов, а Саша — 7 наборов. **946.** а) −4,6; г) $-4\frac{44}{103}$.

§ 32 **956.** а) $41 = 41^1$; б) $100 = 2^2 \cdot 5^2$. **969.** а) $\frac{100}{143}$; б) $\frac{13}{180}$; в) $\frac{89}{1600}$; г) $\frac{1}{66}$. **970.** а) $\frac{13}{330}$; в) $\frac{97}{180}$. **972.** 20, 21,6. **973.** а) $-\frac{23}{42}$; в) $1\frac{5}{24}$. **974.** 40 т — в первый день, 52 т — во второй и 34,5 т — в третий. **977.** а) 1,3; в) $\frac{266}{2313}$.

Глава IV

§ 33 **982.** б) 4; 14; г) 72; 252. **983.** а) 6,12; 10,2; б) 0,525; 0,875. **985.** 60 р. и 120 р. **988.** 625 кг глины, 50 кг песка и 25 кг гипса. **990.** а) 6; б) 8; в) 4; г) 7. **993.** а) −2,89; б) 6,11. **1013.** а) 5; в) $\frac{1}{6}$. **1014.** б) 385; г) 0,988. **1017.** а) 25 : 35 : 40, или 5 : 7 : 8; б) 7960 га. **1018.** а) 58 : 7; б) 812 мужчин и 490 женщин.

§ 34 **1028.** а) $\frac{241}{372}$. **1029.** б) $-3\frac{1}{7}$; г) $-\frac{6}{7}$.

§ 35 **1036.** а) 24 500 р. за 1-е место, 7000 р. за 2-е место; б) 25 200 р. за 1-е место, 3600 р. за 2-е место; в) 8200 р. за 2-е место, 4100 р. за 3-е место. **1042.** 8 дней. **1043.** −0,016. **1044.** 0,735. **1045.** −3,2. **1046.** а) 9200 р. — стоимость машины, 184 р. — стоимость доставки.

§ 36 **1054.** 18 костюмов. **1055.** 30 цистерн. **1060.** 192. **1063.** 1380 оборотов. **1066.** а) 24,1; б) $-\frac{5}{6}$. **1069.** а) ≈16,7%; б) 8%.

§ 37 **1075.** 45 лет и 20 лет. **1076.** 224 пельменя. **1078.** 36 км. **1080.** 24 349 р. **1083.** 23 240 р. и 5810 р. **1085.** 300 км. **1087.** Через 30 мин. **1088.** 20 мин. **1090.** 1 ч. **1092.** а) 2 года; 14 лет; б) 1,2%. **1093.** 990 р. и 440 р. **1094.** а) $\frac{69}{80}$; б) $5\frac{3}{4}$.

§ 38 **1099.** а), б) Случайное событие; в) невозможное; г) достоверное. **1100.** Все события случайные.

§ 39 **1105.** б) 351 билет. **1108.** $\frac{1}{3}$. **1114.** $\frac{1}{560}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие для учителя 4

Глава I. Положительные и отрицательные числа. Координаты

§ 1. Поворот и центральная симметрия 5
§ 2. Положительные и отрицательные числа. Координатная прямая 14
§ 3. Модуль числа. Противоположные числа 22
§ 4. Сравнение чисел 30
§ 5. Параллельность прямых 36
§ 6. Числовые выражения, содержащие знаки +, − 43
§ 7. Алгебраическая сумма и ее свойства 51
§ 8. Правило вычисления значения алгебраической суммы двух чисел 58
§ 9. Расстояние между точками координатной прямой 63
§ 10. Осевая симметрия 66
§ 11. Числовые промежутки 73
§ 12. Умножение и деление положительных и отрицательных чисел 80
§ 13. Координаты 88
§ 14. Координатная плоскость 94
§ 15. Умножение и деление обыкновенных дробей 103
§ 16. Правило умножения для комбинаторных задач 112

Глава II. Преобразование буквенных выражений

§ 17. Раскрытие скобок 119
§ 18. Упрощение выражений 123
§ 19. Решение уравнений 127
§ 20. Решение задач на составление уравнений 134
§ 21. Две основные задачи на дроби 139
§ 22. Окружность. Длина окружности 146
§ 23. Круг. Площадь круга. 154
§ 24. Шар. Сфера 157

Глава III. Делимость натуральных чисел

§ 25. Делители и кратные 160
§ 26. Делимость произведения 167
§ 27. Делимость суммы и разности чисел 171
§ 28. Признаки делимости на 2, 5, 10, 4 и 25 178
§ 29. Признаки делимости на 3 и 9 185
§ 30. Простые числа. Разложение числа на простые множители 191
§ 31. Наибольший общий делитель 199

§ 32. Взаимно простые числа. Признак делимости на произведение. Наименьшее общее кратное 202

Глава IV. Математика вокруг нас

§ 33. Отношение двух чисел 209
§ 34. Диаграммы 218
§ 35. Пропорциональность величин 230
§ 36. Решение задач с помощью пропорций 236
§ 37. Разные задачи 240
§ 38. Первое знакомство с понятием «вероятность» 243
§ 39. Первое знакомство с подсчетом вероятности 247

Домашние контрольные работы 253
Ответы 257

Учебное издание

Зубарева Ирина Ивановна,
Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

6 класс

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *Н. И. Никитина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*. Корректоры *Т. А. Юдичева, Л. С. Щербакова*
Компьютерная верстка: *Т. В. Батракова, А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Подписано в печать 18.06.09. Формат $70\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,3.
Тираж 75 000 экз. Заказ №12206.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

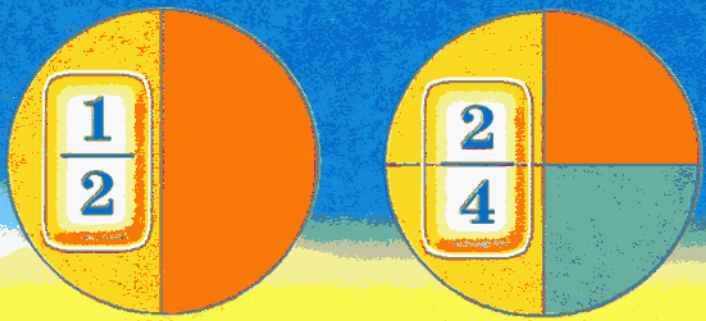
Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

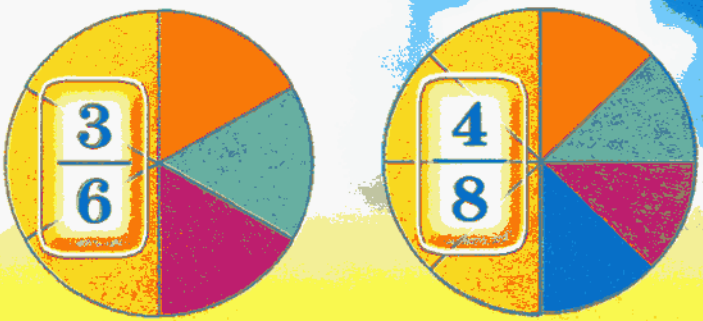
Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Московские учебники и Картолитография».
125252, г. Москва, ул. Зорге, 15.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$





$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

$$(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$$

$$\cancel{a : 0}$$

На нуль делить нельзя!

$$a : 1 = a$$

$$a : (-1) = -a$$

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$$

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{a \cdot n}{b \cdot m}$$

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (до 997)

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ (НОД)

$12 = 2^2 \cdot 3^1, \quad 18 = 2^1 \cdot 3^2$

$6 = 2^1 \cdot 3^1$

НОД (12; 18) = 6

$100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad 40 = 2^3 \cdot 5^1$

$20 = 2^2 \cdot 5^1$

НОД (40; 100) = 20

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ (НОК)

$12 = 2^2 \cdot 3^1, \quad 18 = 2^1 \cdot 3^2$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

НОК (12; 18) = 36

$24 = 2^3 \cdot 3^1, \quad 18 = 2^1 \cdot 3^2$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

НОК (24; 18) = 72